MATEMÁTICA 4 – VOLUME 3
RESOLUÇÕES – EXERCITANDO EM CASA

AULA 21

01. A

Calculando os quadrados das medidas dos lados do triângulo ABC, encontramos

$d^2(A, B) = (-4 - 7)^2 + (3 - 3)^2 = 121,$

$d^2(A, C) = (-4 - 7)^2 + (-2 - 3)^2 = 146$

e

$d^2(B, C) = (-4 + 4)^2 + (-2 - 3)^2 = 25$

Portanto, sendo

$d^2(A, C) = d^2(A, B) + d^2(B, C),$

podemos concluir que o triângulo ABC é retângulo escaleno.

02. B

Os únicos pontos das opções das respostas que pertencem à reta são B (–3, 1), D (0, 4) e E (2, 6);
Calculando agora a distância de P a cada um deles, temos:

$$d_{P,B} = \sqrt{(-5-(-3))^2 + (5-1)^2} = \sqrt{20} < 5$$

$$d_{P,D} = \sqrt{(-5-0))^2 + (5-4)^2} = \sqrt{26} > 5$$

$$d_{P,E} = \sqrt{(-5-2))^2 + (5-6)^2} = \sqrt{50} > 5$$

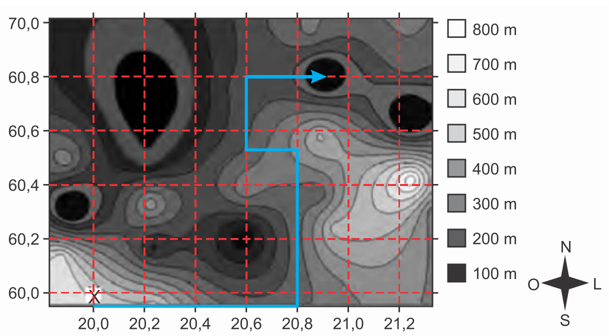
Logo, o ponto (–3,1) atende às condições do problema.

03. E

A distância entre os pontos P e Q no percurso indicado é igual a (550 – 30) + (320 – 20) = 820.
Logo, a distância entre T e os pontos P e Q deverá ser de $\frac{820}{2} = 410.$ Portanto, como $30 + 410 = 440 < 550,$ segue-se que $T = (440, 20).$

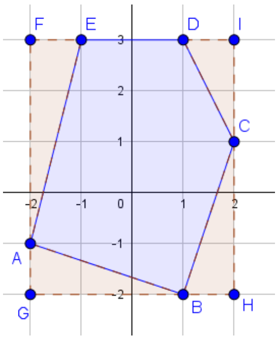
04. A

Esboço do trajeto descrito pelo avião



05. B

A área procurada é igual a área do retângulo FGHI menos as áreas dos triângulos AEF, ABG, BCH, CDI.



$A_{FGHI} = 4x5 = 20\ km^2$

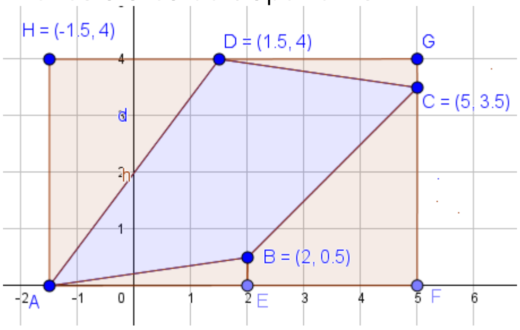
$A_{AEF} = \frac{1x4}{2} = 2\ km^2;\ A_{ABG} = \frac{3x1}{2} = 1{,}5\ km^2$

$A_{BCH} = \frac{1x3}{2} = 1{,}5\ km^2;\ A_{CDI} = \frac{1x2}{2} = 1\ km^2$

$A_{ABCDE} = 20 - 2 - 1{,}5 - 1{,}5 - 1 = 14\ km^2.$

06. A

A área procurada é igual a área do retângulo AFGH menos as áreas dos triângulos ABE, ADH, CDG, menos a área do trapézio BCFE.



$A_{AFGH} = 6{,}5x4 = 26\ cm^2$

$A_{ADH} = \frac{3x4}{2} = 6\ km^2;\ A_{ABE} = \frac{3{,}5x0{,}5}{2} = 0{,}875\ cm^2$

$A_{CDG} = \frac{3{,}5x0{,}5}{2} = 0{,}875\ cm^2;$

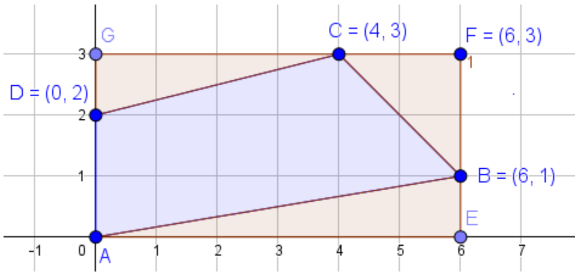
$A_{BCFE} = \frac{(0{,}5+3{,}5).3}{2} = 6\ cm^2$

$A_{ABCDE} = 26 - 6 - 0{,}875 - 0{,}875 - 6 = 12{,}25\ cm^2.$

$$\frac{12{,}25}{A} = \left(\frac{1}{100}\right)^2 \rightarrow A = 122.500\ km^2.$$

07. C

A área procurada é igual a área do retângulo AEFG menos as áreas dos triângulos ABE, BCF, CDG.



$A_{AEFG} = 6x3 = 18\ m^2$

$A_{ABE} = \dfrac{6x1}{2} = 3\ m^2;\ A_{BCF} = \dfrac{2x2}{2} = 1\ m^2$

$ACDG = \dfrac{4x1}{2} = 2\ m^2;$

$A_{ABCD} = 18 - 3 - 1 - 2 = 12\ m^2.$

$Custo = 12x15 = 180.$

08. B

Sejam A(1, 1) e B(5, 3), respectivamente, as coordenadas da catedral e da câmara de vereadores. Assim, a distância entre os pontos A e B é

$d_{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

Como a catedral dista 2 unidades da prefeitura, segue que a escala do gráfico é $\dfrac{2}{500} = \dfrac{1}{250}.$

Portanto, a distância real entre a catedral e a câmara é $250 \cdot 2\sqrt{5} = 500\sqrt{5}$ m.

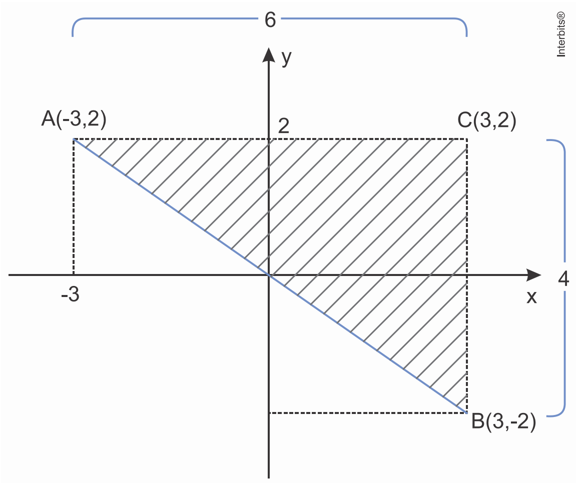
09. B

Como o triângulo ABC é equilátero, segue que

$\overline{AC} = \overline{AB} = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-0)^2} = 2.$

10. D

Representando os pontos A, B e C num sistema cartesiano, temos:

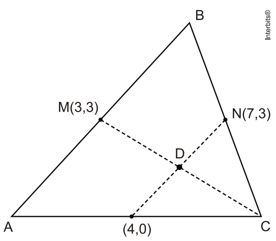


Podemos escrever que a área S do triângulo ABC será dada por:

$S = \dfrac{6 \times 4}{2} = 12$

AULA 21

01. C



D é ponto médio de PN, logo:

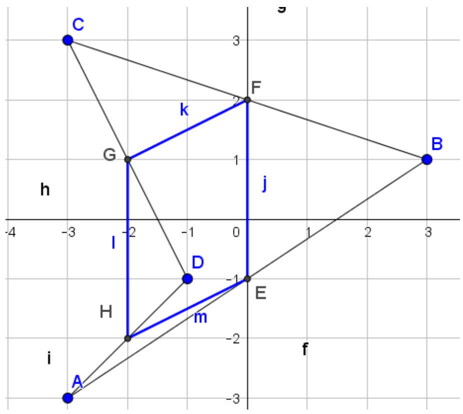
$x_D = \dfrac{7+4}{2} = \dfrac{11}{2}.$

D é ponto médio de CM, logo:

$\dfrac{x_C + 3}{2} = \dfrac{11}{2} \rightarrow x_C = 8.$

02. E

Sejam E, F, G e H os pontos médios de A(– 3, –3), B(3, 1), C(– 3, 3) e D(–1,–1), respectivamente. Observe a figura.



O polígono formado pelos pontos médios é o paralelogramo EFGH.

03. D

Tem-se que

$\left(\dfrac{1+x_B}{2}, \dfrac{2+y_B}{2}\right) = (5, 10) \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 9 \\ y_B = 18 \end{cases}.$

Portanto, podemos concluir que B = (9, 18).

04. C

Em um hexágono regular a distância do centro do polígono a qualquer um dos vértices é igual a medida do lado desse hexágono, e o ponto médio dos vértices opostos é centro do polígono. Assim, a distância de dois vértices opostos é igual ao dobro do lado.

Se C(a, -b) e D(b, a) são vértices opostos de um hexágono relar de lado l, então:

$d_{CD}{}^2 = (b-a)^2 + (a-(-b))^2 \rightarrow$

$(2l)^2 = b^2 - 2ab + a^2 + b^2 + 2ab + a^2 \rightarrow$

$4l^2 = 2(a^2 + b^2) \rightarrow l^2 = \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2).$

$A_{HEXAGONO} = 6.A_{TRIÂNGULO\ EQUILÁTERO®}$

$A_{HEXAGONO} = 6.\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{6\sqrt{3}}{4}.\dfrac{1}{2}(a^2 + b^2) \rightarrow$

$A_{HEXAGONO} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)$

05. D

O ponto médio do segmento AC é M(5, 4). Assim, a medida do segmento BM será:

$$d_{BM} = \sqrt{(4-5)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{5}$$

06. D

A(–4, 3), B(4,–3) e C (4, 3)
O ponto médio de AB: D(4,–3)
O ponto médio de AC: E(4,0)
O ponto médio de BC: F(0,3)

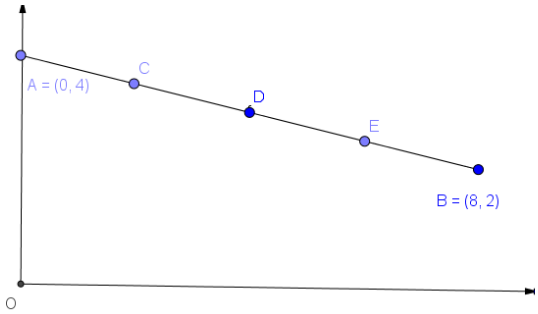
Calculando as medidas dos lados teremos:

$$d_{DE} = \sqrt{(4-4)^2 + (0-(-3))^2} = 3$$
$$d_{EF} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2} = 5$$
$$d_{DF} = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-3)^2} = 2\sqrt{13}$$

Logo, o perímetro será:

$$2p = 3 + 5 + 2\sqrt{13} = 2(4 + \sqrt{13})$$

07. A



As abscissas dos pontos formam uma PA de razão $r_x = \frac{8-0}{4} = 2$, e as ordenadas formam outra PA de razão $r_y = \frac{2-4}{4} = -\frac{1}{2}$. Assim, as coordenas dos pontos C, D e E serão:

$$\text{Abscissas}: (0,2,4,6,8)$$

$$\text{Ordenadas}: (4,\frac{7}{2},3,\frac{5}{2},2)$$

$$D(4,3) \text{ e } E(6,\frac{5}{2})$$

Como o ponto T é ponto médio do segmento DE, então:

$$x_T = \frac{4+6}{2} = 5 \qquad y_T = \frac{3+\frac{5}{2}}{2} = \frac{11}{4}$$

$$T\left(5,\frac{11}{4}\right)$$

08. A

Sejam C e D os vértices opostos a A e B respectivamente. Como M é ponto médio da diagonal AC e BD, então:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \rightarrow x_A + x_C = 2x_M \rightarrow x_C = 2.1 - 1 = 1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \rightarrow y_A + y_C = 2y_M \rightarrow y_C = 2.1 - (-5) = 7$$

Logo, o ponto C é (1,7).

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \rightarrow x_B + x_D = 2x_M \rightarrow x_D = 2.1 - 5 = -3$$

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \rightarrow y_B + y_D = 2y_M \rightarrow y_D = 2.1 - (-3) = 5$$

Logo, o ponto D é (–3,5).

09. A

Em um paralelogramo ABDC as diagonais são AD e BC. Como as diagonais interceptam-se no ponto médio, então:

$$x_M = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{x_B + x_C}{2} \rightarrow x_A + x_D = x_B + x_C$$
$$0 + x_D = 10 + 6 \rightarrow x_D = 16$$
$$y_M = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{y_B + y_C}{2} \rightarrow y_A + y_D = y_B + y_C$$
$$0 + y_D = 5 + 12 \rightarrow y_D = 17$$
$$\text{Logo}: x_D + y_D = 16 + 17 = 33$$

10. C

Se M é ponto médio de AB, então:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow x_A + x_B = 2x_M \rightarrow x_A + x_B = 6$$

Se N é ponto médio de BC, então:

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} \rightarrow x_B + x_C = 2x_N \rightarrow x_B + x_C = 14$$

Se P é ponto médio de AC, então:

$$x_P = \frac{x_A + x_C}{2} \rightarrow x_A + x_C = 2x_P \rightarrow x_A + x_C = 8$$

Resolvendo o sistema temos:

$$\left\{\begin{matrix} x_A + x_B = 6 \\ x_B + x_C = 14 \\ x_A + x_C = 8 \end{matrix}\right\} \rightarrow 2x_A + 2x_B + 2x_C = 28$$

$$x_A + x_B + x_C = 14. \text{ como } x_A + x_B = 6, \text{ então:}$$
$$6 + x_C = 14 \rightarrow x_C = 8.$$

AULA 23

01. B

Como EFGH é um losango de diagonais 2 e 4, temos

$$(EFGH) = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4 \text{ u.a.}$$

02. B

Seja P = (x, y), com x > 0 e y > 0.

Temos

$$A_{\triangle APB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot y \rightarrow \frac{25}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot y \rightarrow y = 5.$$

Além disso,

$$A_{\triangle CPD} = \frac{1}{2}\|D\| = 6 \rightarrow \|D\| = 12$$

$$\left\|\begin{matrix} 8 & 5 & 1 \\ x & 5 & 1 \\ 11 & 8 & 1 \end{matrix}\right\| = 12 \rightarrow |40 + 8x + 55 - 55 - 64 - 5x| = 12$$

$$|3x - 24| = 12 \rightarrow \begin{Bmatrix} 3x - 24 = 12 \therefore x = 12 \\ \text{ou} \\ 3x - 24 = -12 \therefore x = 4 \end{Bmatrix}$$

Portanto, $x.y = 4 \cdot 5 = 20$ ou $12.5 = 60$

03. D

$$\left\|\begin{matrix} 0 & 10000 & 1 \\ 5 & 8000 & 1 \\ x & y & 1 \end{matrix}\right\| = 0 \rightarrow 10000x + 5y - 8000x - 50000 = 0$$

$$5y + 2000x = 50000(\div 5) \rightarrow y = 10000 - 400x$$

04. D

Desde que os pontos (0, 200000), (2, 240000) e (10, y_1) estão alinhados, vem

$$\left\|\begin{matrix} 0 & 200000 & 1 \\ 2 & 240000 & 1 \\ 10 & y & 1 \end{matrix}\right\| = 0 \rightarrow$$

$$2y + 2000000 - 2400000 - 400000 = 0$$
$$y = 400000$$

05. C

A tabela abaixo mostra que em 2005 foram registrados 400 casos de dengue, em 2013, 8 anos depois, foram registrados 560 casos, e deseja-se saber quantos casos foram em 2015.

ANO	2005	2013	2015
TEMPO	0	8	10
CASOS	400	560	y

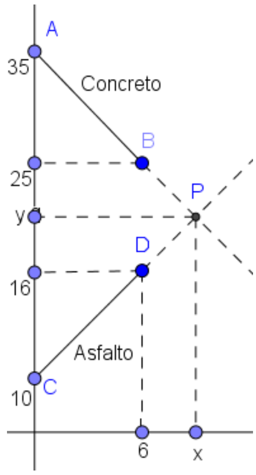
Como os pontos pertencem a mesma reta, então:

$$\left\|\begin{matrix} 0 & 400 & 1 \\ 8 & 560 & 1 \\ 10 & y & 1 \end{matrix}\right\| = 0 \rightarrow 8y + 4000 - 5600 - 3200 = 0$$

$$8y = 4800 \rightarrow y = 600$$

06. B

A figura abaixo mostra que o ponto P(x, y) está alinhado com os pontos A e B, e também com os pontos C e D.



Pela condição de alinhamento temos:

$$\left\|\begin{matrix} 0 & 35 & 1 \\ 6 & 25 & 1 \\ x & y & 1 \end{matrix}\right\| = 0 \rightarrow 6y + 35x - 25x - 210 = 0$$

$$6y + 10x = 210(\div 2) \rightarrow 3y + 5x = 105.$$

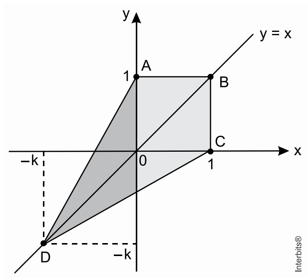
$$\left\|\begin{matrix} 0 & 10 & 1 \\ 6 & 16 & 1 \\ x & y & 1 \end{matrix}\right\| = 0 \rightarrow 6y + 10x - 16x - 60 = 0$$

$$6y - 6x = 60(\div 6) \rightarrow y - x = 10.$$

$$\begin{Bmatrix} 3y + 5x = 105 \\ y - x = 10 \end{Bmatrix} \rightarrow y = x + 10$$

$$3.(x + 10) + 5x = 105 \rightarrow 8x = 75$$
$$x = 9{,}375$$

07. E



Seja E(0, y) um ponto que pertence a reta CD. Pela condição de alinhamento temos que:

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & y & 1 \\ -k & -k & 1 \end{matrix}\right\| = 0 \rightarrow y + ky + k = 0 \rightarrow y = -\frac{k}{k+1}$$

Logo o ponto $E = \left(0, -\frac{k}{k+1}\right)$, sendo $k > 0$,

$$A_{\triangle ADE} = A_{\square ABCE} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{k}{k+1}\right) \cdot k = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{k}{k+1} + 1\right) \cdot 1 \rightarrow$$

$$k^2 - k - 1 = 0 \rightarrow k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

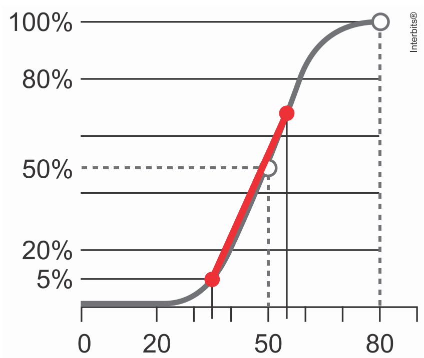
08. B

$$A_{\square ABCO} = \frac{1}{2}\|D\| = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 30 \\ 40 & 20 \\ 50 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 30 \end{Vmatrix} \rightarrow$$

$$A_{\square ABCO} = \frac{1}{2}|-1200-1000| = 1100$$

09. A

Desenhando o gráfico (intervalo [35; 55] representado pelo trecho em vermelho):



Os pontos (35, 5), (50, 50) e (55, y) são colineares, logo:

Para encontrar a equação da reta em vermelho pode-se escrever:

$$\begin{Vmatrix} 35 & 5 & 1 \\ 50 & 50 & 1 \\ 55 & y & 1 \end{Vmatrix} = 0 \rightarrow 1750 + 50y + 275 - 2750 - 35y - 250 = 0$$

$$15y - 975 = 0 \rightarrow y = 65.$$

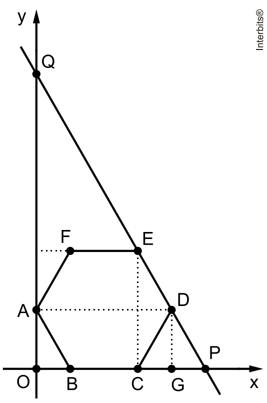
Para reduzir esse risco à metade, pode-se escrever:

$$\begin{Vmatrix} 35 & 5 & 1 \\ 50 & 50 & 1 \\ x & \frac{65}{2} & 1 \end{Vmatrix} = 0 \rightarrow 1750 + 1625 + 5x - 50x - 1137{,}5 - 250 = 0$$

$$-45x + 1987{,}5 \rightarrow x \cong 44{,}2.$$

$$\frac{55 - 44{,}2}{55} \approx 0{,}2 = 20\% \text{ de redução}$$

10. D



Como os ângulos internos de um hexágono regular são iguais a 120°, segue que $A\hat{B}O = 180° - A\hat{B}C = 60°$. Assim, considerando o triângulo ABO e dado que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2$, temos

$$\cos A\hat{B}O = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{OB} = 1 \quad \text{e}$$

$$\operatorname{sen} A\hat{B}O = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AO} = \sqrt{3}.$$

Daí, $B = (1, 0)$, $C = (3, 0)$, $A = (0, \sqrt{3})$ e $D = (4, \sqrt{3})$.

Além disso, como CDP é equilátero, $P = (5, 0)$.

Como os pontos P, D e Q são colineares então:

Então, a equação da reta $\overleftrightarrow{DE}$ é

$$\begin{Vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 4 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & y & 1 \end{Vmatrix} = 0 \rightarrow 5\sqrt{3} + 4y - 5y = 0 \rightarrow y = 5\sqrt{3}$$

Portanto, $Q = (0, 5\sqrt{3})$ e a distância pedida é $\sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{100} = 10.$

AULA 24

01. C

O coeficiente linear da reta é b = 1, pois ela passa pelo ponto A(0, 1) e o coeficiente angular a será dado por:

$$a = \frac{8-1}{6-0} = \frac{7}{6}$$

Portanto, a equação da reta será dada por:

$$y = ax + b \Rightarrow y = \frac{7}{6} \cdot x + 1$$

02. B

A única opção que possui os dois pontos pertencentes a reta é a [B].

Calculando a distância de cada um desses pontos ao ponto T, obtemos 200 m.

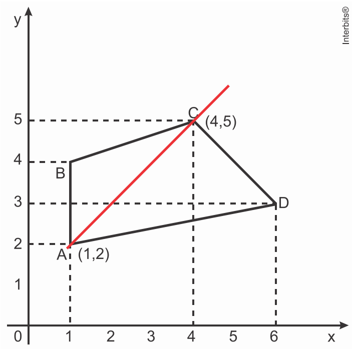
03. E

De acordo com as informações, temos r: y = 10x + a e s: y = 9x + b. Logo, se x = 6 é a abscissa do ponto de interseção de r e s, então

$$10 \cdot 6 + a = 9 \cdot 6 + b \Leftrightarrow b = a + 6.$$

04. E

Calculando o coeficiente angula da reta que passa pelos pontos A e C, temos:



O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A e C será dado por:

$$m = \frac{5-2}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$$

Determinando, agora, a equação da reta que passa pelos pontos A e C, podemos escrever:

$$y - 2 = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = x + 1$$

O coeficiente linear é o valor de y quando x vale zero, logo o coeficiente linear desta reta é 1.

05. C

Seja P o ponto da reta que passa por A e B, tal que o triângulo APC seja isósceles de base AC. Daí, chamando de M = (4, 2) o ponto médio do segmento AC, é imediato que PM é mediana do triângulo APC. Ademais, PM também é altura.

A equação da reta que passa por A e B é dada por

$$y - 2 = \frac{4-2}{3-1} \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Logo, temos P = (4, 5) e, portanto, $\overline{PM} = 3\text{ u.c.}$

Por outro lado, sendo $\overline{AC} = 6\text{ u.c.}$, podemos concluir que o triângulo APC é retângulo isósceles. Em consequência, e pela desigualdade triangular, segue que a menor mediana do triângulo APC é PM.

06. B

Reescrevendo a equação da reta y = −2x + 1 sob a forma $\frac{x}{1/2} + y = 1$, tem-se que os pontos de interseção dessa reta com os eixos cartesianos são $N = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e M = (0, 1).

Como os triângulos POQ e MON são semelhantes por AA, temos

$$\frac{(POQ)}{(MON)} = k^2 \Rightarrow \frac{9}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}} = k^2$$
$$\Rightarrow k = 6,$$

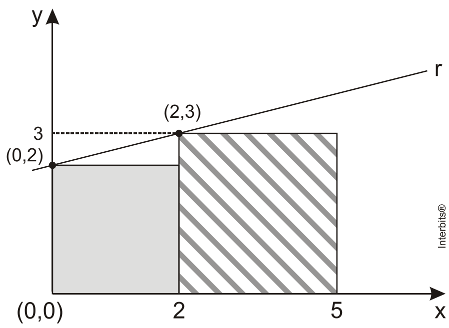
Com k sendo a razão de semelhança. Desse modo, vem P = (0, 6) e Q (3, 0).

Portanto, o resultado pedido é

$$d(P, Q) = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}\text{ m}.$$

07. A

O quadrado cinza tem lado medindo 2 e o quadrado hachurado tem lado medindo 3. Observe a figura:



Coeficiente angular da reta r:

$$m_r = \frac{3-2}{2-0} = \frac{1}{2}$$

logo, a equação reduzida da reta r será:

$$y = \frac{1}{2} \cdot x + 2$$

que é equivalente à equação:

x − 2y = −4

08. C

Vamos supor que o plano cartesiano de centro O esteja graduado em centímetros.

A reta r intersecta o eixo das abscissas no ponto Q = (6, 0). Além disso, a abscissa do ponto P é tal que 2x = −x + 6, donde obtemos x = 2. Logo, vem P = (2, 4) e, portanto, segue que o volume do sólido corresponde à soma dos volumes de dois cones cujos raios da base medem 4 cm, e cujas alturas medem, respectivamente, 2 cm e 4 cm, isto é,

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4 \cong 96\,\text{cm}^3.$$

09. A

Para $x = 2 \Rightarrow f(2) = \log_2 2 = 1 \Rightarrow A(2, 1)$

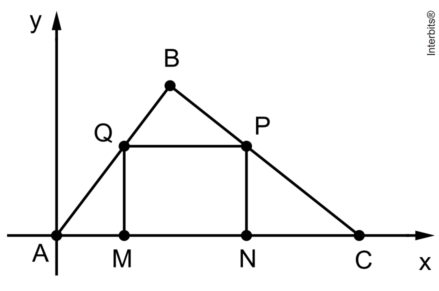
Para $x = 0{,}25 = \frac{1}{4} \Rightarrow f(\frac{1}{4}) = \log_2 \frac{1}{4} = -2 \Rightarrow B\left(\frac{1}{4}, -2\right)$

Onde A, B e K estão alinhados, logo:

$$\left[\begin{matrix} k & 2 & k \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} - 2\right] \Rightarrow k = \frac{17}{12}$$

10. D

Considere a figura.



A equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é dada por

$y = \frac{y_B}{x_B}x \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x.$

Logo, tem-se $Q = \left(\frac{3y}{4}, y\right)$ e $M = \left(\frac{3y}{4}, 0\right)$, com $0 < y < 4.$

Além disso, a equação da reta $\overleftrightarrow{BC}$ é

$$y - y_C = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}(x - x_C) \Leftrightarrow y - 0 = \frac{4-0}{3-8}(x-8)$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{32}{5}.$$

Daí, $P = \left(\frac{32-5y}{4}, y\right)$ e $N = \left(\frac{32-5y}{4}, 0\right)$, com $0 < y < 4.$

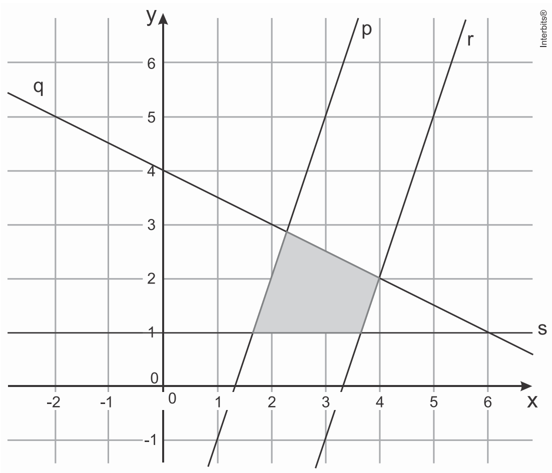
A área do retângulo MNPQ é dada por

$$\begin{aligned}(MNPQ) &= \overline{MN} \cdot \overline{PN} \\ &= \left(\frac{32-5y}{4} - \frac{3y}{4}\right) \cdot (y-0) \\ &= -2y^2 + 8y \\ &= -2 \cdot [(y-2)^2 - 4)] \\ &= 8 - 2 \cdot (y-2)^2.\end{aligned}$$

Portanto, o retângulo MNPQ tem área máxima quando $y = 2$, ou seja, quando $P = \left(\frac{11}{2}, 2\right).$

AULA 25

01. B



As retas p e r são paralelas, pois possuem o mesmo coeficiente angular, ou seja, 3.
Portanto, todo quadrilátero com dois lados paralelos é um trapézio.
Este trapézio não poderia ser um retângulo, pois o produto dos coeficientes angulares das retas p e q é diferente de -1, o que nos mostra que o ângulo formado pelas retas p e q não é reto.

02. C
O resultado pedido é dado por

$$A = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{3}{2}$$

03. C
Calculando:

$$\text{reta r} \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y = 5x - 4$$

$$\text{interseção reta r e eixos} \Rightarrow A(0,-4) \text{ e } B\left(4/5, 0\right)$$

$$\text{triângulo OAB} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 4/5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{5} = \frac{16}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = 1{,}6$$

Analisando as alternativas:
A) FALSA. A reta (r) intercepta o eixo das ordenadas no ponto de abscissa -4.
B) FALSA. O coeficiente angular da reta (r) é 5.
C) VERDADEIRA. A reta (r) determina com os eixos cartesianos um triângulo de área 1,6.
D) FALSA. Se
$x = -1/2 > -4/5 \Rightarrow y = 5 \cdot -1/2 - 4 \Rightarrow y = -13/2.$
E) FALSA. A reta (r) intercepta o eixo das abcissas no ponto de abscissa $\frac{4}{5}$.

04. D
Determinando os pontos de intersecção da reta de equação 3x + y + 4 = 0 com o eixo x.
Fazendo y = 0, temos:

$$3x + 0 + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \Rightarrow B = \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$$

Determinando os pontos de intersecção da reta de equação 2x − 5y + 14 = 0 com o eixo x.
Fazendo $y = 0$, temos:

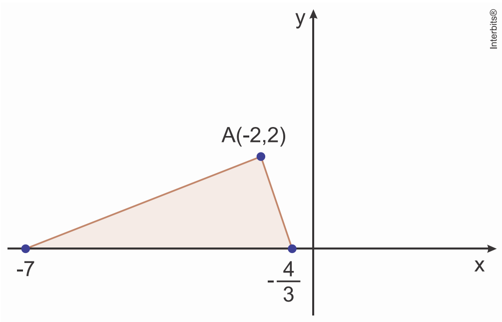
$$2x - 5 \cdot 0 + 14 = x = 7 \Rightarrow C = (-7, 0).$$

Determinado agora a ordenado do ponto de intersecção entre as retas.

$$\begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ 2x - 5y + 14 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos x = -2 e y = 2 (altura do triângulo) e o ponto A (-2, 2).

Temos então o triângulo ABC representado abaixo:



Logo, a área A do triângulo será dada por:

$$A = \frac{\left(\frac{-4}{3} - (-7)\right)\cdot 2}{2} = \frac{17}{3}$$

05. C

A equação da reta que passa pelo ponto (0, 2) é $y = \frac{1}{2}x + 2$, enquanto que a reta que passa pelo ponto (1, 0) tem por equação y = -3x + 3.

A área pedida corresponde à soma das áreas dos triângulos hachurados, ou seja,

$$\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{matrix}\right\| + \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ 2 & 3 & \frac{15}{7} & 2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot|8| + \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{4}{7} - \frac{6}{7}\right|$$

$$= 4 + \frac{1}{7}$$

$$= \frac{29}{7}\text{ u.a.}$$

06. A

O coeficiente angular da reta r é $\frac{1}{2}$ e a reta t é perpendicular à reta r, logo $m_t = -2$.

Para determinar as coordenadas do ponto A devemos considerar y = 0 na equação da reta r, logo:

$2y = x - 3$

$2 \cdot 0 = x - 3$

$X = 3$

Portanto, o ponto A será A(3, 0) e a equação da reta t será:

$y = 0 = -2 \cdot (x - 3)$

$y = -2x + 6$

07. C

Seja M o ponto médio do segmento de reta AB.

Se $d_{A,r} = d_{B,r} = d$, então M pertence à reta r. Logo,

$$M = \left(\frac{8+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 4\right)$$

e, portanto, a equação de r é

$$y - 4 = tg45°\cdot\left(x - \frac{11}{2}\right) \Leftrightarrow y = x - \frac{3}{2}.$$

Em consequência, tomando y = 0, segue-se que

$$C = \left(\frac{3}{2}, 0\right).$$

08. C

A região do plano definida por $x \geq 0{,}9$, $y \geq 0{,}8$ e $x + y \geq 2 \Leftrightarrow y \geq -x + 2$ está representada na alternativa [C].

09. C

A equação da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é:

$$y = \frac{5-0}{10-0}x = \frac{1}{2}x.$$

Seja R = (20, 20). O ponto P é a interseção das retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{RP}$. Como estas retas são perpendiculares, segue que $m_{\overleftrightarrow{RP}} = -2$. Assim, a equação da reta $\overleftrightarrow{RP}$ é:

$y - 20 = -2\cdot(x - 20) \Leftrightarrow y = -2x + 60.$

O ponto P é a solução do sistema formado pelas equações de $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{RP}$:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = -2x + 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ \frac{5}{2}x = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 12 \\ x = 24 \end{cases} \Rightarrow P = (24, 12).$$

10. B

Sejam $y = m_r x + h_r$ a equação da reta r.

Do gráfico segue que $h_r = 1$. Além disso, como r intersecta o eixo x no ponto de abscissa x = -2, segue que $0 = m_r\cdot(-2) + 1 \Leftrightarrow m_r = \frac{1}{2}$.

Por outro lado, como a reta s intersecta o eixo x em (3, 0), e o ângulo que ela forma com esse eixo é 45°, temos que sua equação é

$y - 0 = tg45°\cdot(x - 3) \Leftrightarrow y = x - 3.$

As coordenadas do ponto I constituem a solução do sistema formado pelas equações de r e de s:

$$\left|\begin{matrix} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = x - 3 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} \frac{1}{2}x + 1 = x - 3 \\ y = x - 3 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} x_I = 8 \\ y_I = 5 \end{matrix}\right..$$

Portanto, a distância pedida é dada por

$$\sqrt{(26-8)^2 + (29-5)^2} = \sqrt{18^2 + 24^2} = 30\text{km}.$$

AULA 26

01. E

A circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$ possui centro no ponto (0, 0) e raio igual a 3.

A parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de –1 a 1, possui concavidade voltada para baixo e vértice no ponto (0, –1).

02. C

Seja $f(x, y) = (x-6)^2 + (y-2)^2 - 16.$ Logo, temos

$f(1, 7) = (1-6)^2 + (7-2)^2 - 16 = 25 + 25 - 16 > 0,$

implicando em (1, 7) exterior à circunferência, e

$f(7, 1) = (7-6)^2 + (1-2)^2 - 16 = 1 + 1 - 16 < 0,$

implicando em (7, 1) interior à circunferência.

03. D

Analisando o gráfico, tem-se que as coordenadas dos estabelecimentos são:

A(5,4)

B(−3,1)

C(4,2)

D(−4,−3)

Assim, para avaliar se o estabelecimento está dentro da área de cobertura do sinal basta substituir suas coordenadas na equação:

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 \leq 0$

$A \Rightarrow 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 - 4 \cdot 4 - 31 \leq 0 \therefore -16 \leq 0 \Rightarrow$ OK!

$B \Rightarrow (-3)^2 + 1^2 - 2 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 - 31 \leq 0 \therefore -19 \leq 0 \Rightarrow$ OK!

$C \Rightarrow 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 31 \leq 0 \therefore -27 \leq 0 \Rightarrow$ OK!

$D \Rightarrow (-4)^2 + (-3)^2 - 2 \cdot (-4) - 4 \cdot (-3) - 31 \leq 0 \therefore 14 \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ FALSO!

04. A

Sobre as inequações apresentadas:

$x^2 + y^2 \leq 4 \Rightarrow$ Circunferência de raio 2 e centro na origem.

$x + y \leq 0 \Rightarrow$ Reta que passa pelo segundo e quarto quadrantes cortando-os diagonalmente, passando também pela origem. Assim, existirá um segmento de reta pertencente à mesma que é diâmetro da circunferência anterior.

Assim, a região delimitada será um semicírculo de raio 2, ou seja:

$S = \dfrac{\pi \cdot 2^2}{2} \Rightarrow S = 2\pi$

05. C

Completando os quadrados, encontramos

$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 16.$

Portanto, o centro da circunferência é o ponto $(3, -4)$ e, assim, a resposta é dada por

$\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ u.c.

06. B

Completando os quadrados, vem

$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-3)^2 = 9.$

Logo, o raio da circunferência mede 3 e seu centro é (–4, 3).

A resposta é 1, pois a circunferência é tangente ao eixo das abscissas no ponto (–4, 0).

07. C

Determinando o raio de medida R da circunferência externa, temos:

$x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 = -7 + 16 + 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 = 25$

Portanto, o raio da circunferência externa é $R = \sqrt{25} = 5.$

Logo, o raio da circunferência interna é $5 - 2{,}5 = 2{,}5 = \dfrac{5}{2}.$

A área do furo interno será dada por:

$A = \pi \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25 \cdot \pi}{4}\ cm^2$

08. A

Admitindo que r seja o raio da circunferência, temos:

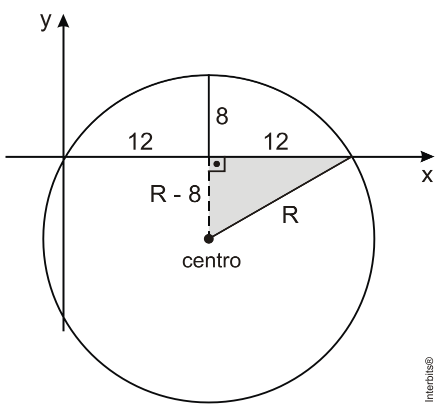
$\pi \cdot r^2 = 900 \cdot \pi \Rightarrow r = 30,$ portanto, a equação da circunferência será dada por:

$(x-0)^2 + (y-10)^2 = 30^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 20y - 800 = 0$

09. D

A trajetória descrita pelo assento do balanço é parte da circunferência $x^2 + y^2 = 4.$ Logo, sabendo que y < 0, temos $f(x) = -\sqrt{4 - x^2},$ com $-2 < x < 2.$

10. A



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo assinalado temos:

$(R-8)^2 + 12^2 = R^2 \Leftrightarrow 16R = 208 \Leftrightarrow R = 13$

Logo o centro é o ponto C(12, –5)

E a equação da circunferência $(x - 12)^2 + (y + 5)^2 = 13^2$

Ou seja, $(x - 12)^2 + (y + 5)^2 = 169$

AULA 27

01. B

Representando os pontos no plano cartesiano tem-se um triângulo retângulo com ângulo reto em A. Todo triângulo retângulo pode ser inscrito numa circunferência de diâmetro igual à hipotenusa. Pelo teorema de Pitágoras tem-se que a hipotenusa é igual a 10 e, portanto, o raio é igual a 5. O centro O da circunferência será o ponto médio do segmento BC. Assim, pode-se escrever:

$O\left(\dfrac{1+7}{2}, \dfrac{9+1}{2}\right) \Rightarrow O(4,5)$

Eq. circunferência $\Rightarrow (x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$

$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -8 \\ n = -10 \\ p = 16 \end{cases}$

$m + 2n + 3p = -8 - 20 + 48 = 20$

02. C

Se as circunferências tangenciam os dois eixos coordenados e estão no primeiro quadrante, então as coordenadas de seus centros são iguais ao comprimento de seu raio. Assim, pode-se escrever:

$\lambda_1 \to \text{raio} = 1;\ C_1(1, 1)$

$\lambda_2 \to \text{raio} = 2;\ C_2(2, 2)$

$$\begin{cases} \lambda_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2 \to x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ \lambda_2: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \to x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

Fazendo $\lambda_1 - \lambda_2$ tem-se uma reta r que é a reta que passa pelos pontos de intersecção das circunferências. Como os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pertencem a essa reta, pode-se escrever:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = r \to r: 2x + 2y - 3 = 0 \to x + y = \frac{3}{2}$$

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \frac{3}{2}$$

$$(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

03. C

Calculando:

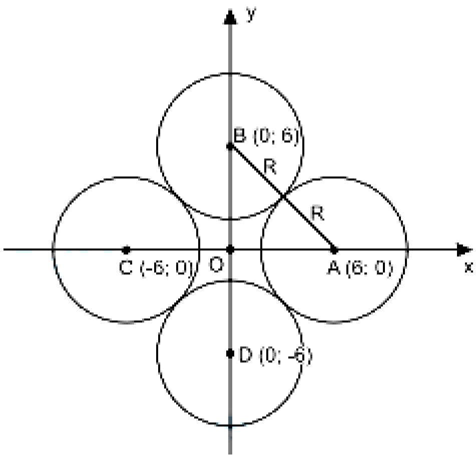
$$x^2 + y^2 = x - y \to \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}$$

$$C\left(\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right) \text{ e } R = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A reta que divide a circunferência em duas partes iguais passa pelo centro C e pode ter equação igual a x − y = 1.

04. D

Quando as circunferências forem tangentes duas a duas cada uma delas interceptará duas outras em um ponto.



$$(2R)^2 = 6^2 + 6^2 \to R = 3\sqrt{2}$$

$$R \geq 3\sqrt{2}$$

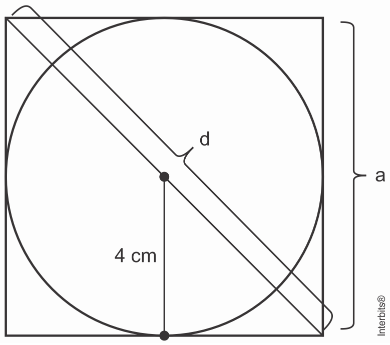
05. E

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y = 6 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 6 + 1 + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 16$$

Portanto, o centro da circunferência será o ponto (3, −1) e o raio será 4.

Considerando o quadrado a seguir circunscrito nessa circunferência de raio 4 cm.



Portanto, a = 2 · 4 = 8 cm

E a diagonal d do quadrado será dada por:

$$d = a \cdot \sqrt{2} = 8 \cdot \sqrt{2}$$

06. C

É fácil ver que a circunferência $x^2 + y^2 = ax + by$, intersecta a origem dos eixos cartesianos. Ademais, tomando x = 0, obtemos y = 0 ou y = b. Por outro lado, fazendo y = 0, encontramos x = 0 ou x = a. Em consequência, podemos afirmar que a resposta é 3.

07. C

Determinando o centro e o raio da circunferência.

$$x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 = 4^2$$

O centro é o ponto (4, 4) e o raio mede 4.

Calculando a área do setor de 90° do círculo determinado por esta circunferência, temos:

$$A_S = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} = 4\pi$$

Calculando, agora, a área do triângulo ABC.

$$A_{\Delta ABC} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

Portanto, a área do segmento circular pedida é:

$$A = A_S - A_{\Delta ABC} \Rightarrow A = 4\pi - 8 \Rightarrow A = 4 \cdot (\pi - 2)$$

08. A

Sejam $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ e $x^2 + y^2 - 6x - 2y = -6$, respectivamente, as equações das circunferências λ_1 e λ_2.

Completando os quadrados, obtemos

$$x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = 2^2.$$

Logo, $C_1 = (0, 3)$ é o centro da circunferência λ_1.

Analogamente, vem

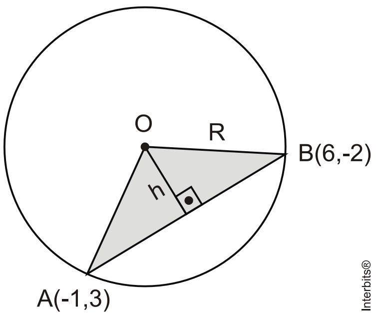
$$x^2 + y^2 - 6x - 2y = -6 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2,$$

ou seja, $C_2 = (3, 1)$ é o centro da circunferência λ_2.

Portanto, a equação da reta que passa por C_1 e C_2 é dada por

$$y - 3 = \frac{1-3}{3-0} \cdot (x - 0) \Leftrightarrow 3y - 9 = -2x$$
$$\Leftrightarrow 2x + 3y = 9.$$

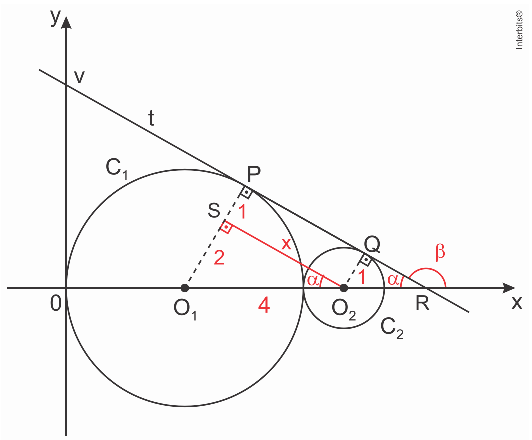
09. A



$$AB = \sqrt{(6-(-1))^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{50}$$
$$\frac{\sqrt{50}.h}{2} = \frac{25}{2} \Leftrightarrow h = \frac{25}{\sqrt{50}}$$
$$R^2 = h^2 + \left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2$$
$$R^2 = \left(\frac{25}{\sqrt{50}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2$$
$$R^2 = \frac{25}{2} + \frac{25}{2}$$
$$R = \sqrt{25}$$
$$R = 5$$

10. B

Calculando:



ΔSO_1O_2:

$$4^2 = 2^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$\frac{4}{\text{sen } 90°} = \frac{2}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$$
$$\beta = 180° - \alpha \Rightarrow \beta = 150°$$
$$t: y = ax + b$$
$$a = \text{tg } \beta = \text{tg } 150° = -\text{tg } 30° \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\Delta QRO_2 \approx \Delta SO_1O_2$:

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{\overline{RO_2}} \Rightarrow \overline{RO_2} = 2$$
$$\overline{OR} = 9$$

$\Delta SO_1O_2 \approx \Delta VOR$:

$$\frac{\overline{VO}}{2} = \frac{9}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{VO} = \frac{18}{2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$
$$V\left(0\,;3\sqrt{3}\right) \Rightarrow b = 3\sqrt{3}$$

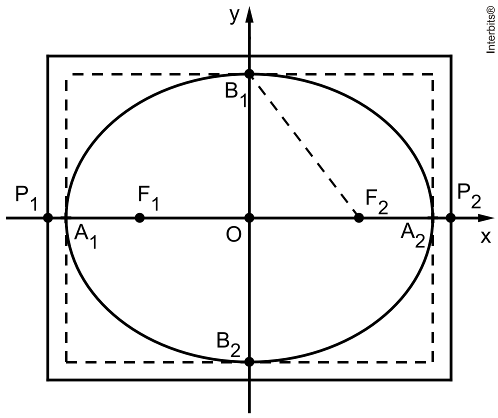
Assim:

$$t\!: y = ax + b$$
$$t\!: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3\sqrt{3}$$

AULA 28

01. C

Adotando convenientemente um sistema de coordenadas cartesianas, com origem no ponto médio do segmento F_1F_2, considere a figura.



Temos $A_1 = (-10, 0)$, $A_2 = (10, 0)$, $B_1 = (0, 8)$, $B_2 = (0, -8)$, $F_1 = (-c, 0)$, e $F_2 = (0, c)$, com $c > 0$. Logo, da relação fundamental da elipse, vem

$$\overline{B_1F_2}^2 = \overline{OF_2}^2 + \overline{OB_1}^2 \Leftrightarrow 10^2 = c^2 + 8^2$$
$$\Rightarrow c = 6.$$

Portanto, a distância pedida é dada por

$$\overline{OP_2} - \overline{OF_2} = 11 - 6 = 5 \text{ m}.$$

02. C

Sabendo que o perímetro do terreno mede 300 m e sua área 5000 m², temos

$$\begin{cases} 2(x+y)=300 \\ xy=5000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=150 \\ xy=5000 \end{cases}$$

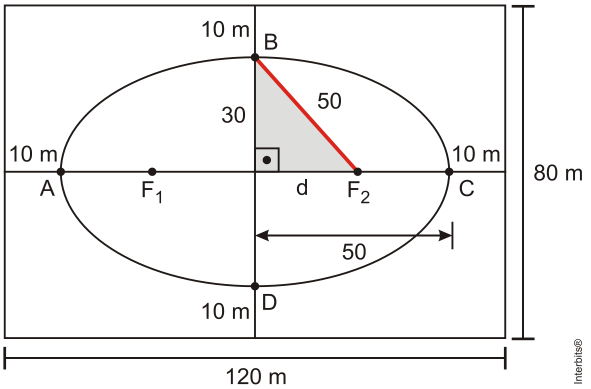
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=100 \text{ e } y=50 \\ \text{ou} \\ x=50 \text{ e } y=100 \end{cases}.$$

Porém, como x > y, segue-se que x = 100 e y = 50. Daí, sendo $\overline{OF_2}=f$, pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{y}{2}\right)^2+f^2 \Leftrightarrow 50^2=25^2+f^2$$
$$\Rightarrow f=\sqrt{25^2\cdot 3}$$
$$\Rightarrow f=25\sqrt{3}\text{ m}.$$

Portanto, o resultado é $2f=2\cdot 25\sqrt{3}=50\sqrt{3}$ m.

03. D



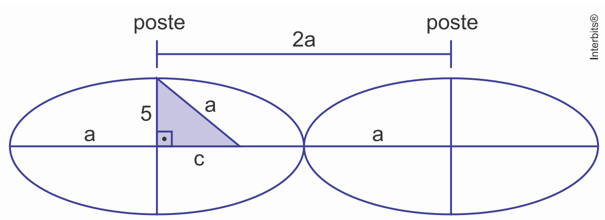
$d^2+30^2=50^2$

$d^2=1600$

$d=40\text{m}$

$2d=80\text{m}$ (distância focal)

04. B



$$\frac{c}{a}=0{,}943 \Leftrightarrow c=0{,}943a$$
$$a^2=5^2+c^2 \Leftrightarrow a^2=25+(0{,}943a)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2=25+0{,}889a^2 \Leftrightarrow 0{,}111a^2=25 \Leftrightarrow$$
$$a=\sqrt{\frac{25}{0{,}111}} \Leftrightarrow a=\frac{5}{0{,}3333\ldots}=\frac{5}{\frac{1}{3}}=15.$$

A distância é $2a=2\cdot 15=30$ m.

05. B

$$C(-4,1), V(2,1), e=\frac{\sqrt{13}}{3}$$
$$d_{CV}=a \to a=2-(-4) \to a=6$$
$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3} \to \frac{c}{6}=\frac{\sqrt{13}}{3} \to c=2\sqrt{13}$$
$$b^2=(2\sqrt{13})^2-6^2 \to b^2=16$$
$$\frac{(x+4)^2}{36}-\frac{(y-1)^2}{16}=1$$

06. E

Completando os quadrados, obtemos

$$9x^2-y^2=36x+8y-11 \Leftrightarrow 9(x^2-4x)-(y^2+8y)=-11$$
$$\Leftrightarrow 9[(x-2)^2-4]-[(y+4)^2-16]=-11$$
$$\Leftrightarrow 9(x-2)^2-(y+4)^2=9$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{1^2}-\frac{(x-2)^2}{3^2}=1,$$

que é a equação de uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo Ox.

07. B

Desde que $y^2=2-2x^2$, temos

$$x^2+2y^2=2 \Leftrightarrow x^2+2(2-2x^2)=2$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Logo, vem

$$y^2=2-2\cdot\frac{2}{3} \Leftrightarrow y^2=\frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Portanto, como o quadrilátero de vértices $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ é um quadrado de lado $2\sqrt{\frac{2}{3}}$, segue que a resposta é $\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{8}{3}$ u.a.

08. B

Seja r o raio da bola.

A equação da circunferência de centro (0, 3), tangente à parábola $y = x^2$, é dada por $x^2+(y-3)^2=r^2$. Daí, segue que

$$x^2+(x^2-3)^2=r^2 \Leftrightarrow x^4-5x^2+9-r^2=0.$$

Tomando $x^2 = t$, obtemos $t^2-5t+9-r^2=0$. Assim, como o discriminante dessa equação deve ser igual a zero, vem

$$(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot(9-r^2) = 0 \Leftrightarrow r^2 = \frac{11}{4}$$
$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

09. A

Solução. Observando o gráfico temos que a = 2 e b = 3.
Logo, a equação tem $a^2 = 4$ e $b^2 = 9$

10. C

i) $2c = |4-(-4)| = 8 \Rightarrow c = 4$

ii) excentricidade : $e = \frac{c}{a} \Rightarrow 0{,}8 = \frac{4}{a} \Rightarrow a = \frac{4}{0{,}8} = \frac{40}{8} = 5$

C) $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 25 - 16 = 9$

D) Centro: $\left(\frac{-4+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (0,0)$

E) Equação: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$

AULA 29

01. A

$F(-3{,}0)$, reta diretriz $x = 5 \rightarrow$ Vértice : $V(1{,}0)$ e $p=4$

$(y-y_0)^2 = -4p(x-x_0) \rightarrow (y-0)^2 = -4.4(x-1)$

$y^2 = -16x + 16$

02. A

$x^2 - 6x - 20y + 29 = 0$

$x^2 - 2.3.x + 3^2 - 9 - 20y + 29 = 0 \rightarrow$

$(x-3)^2 = 20y - 20 \rightarrow (x-3)^2 = 20(y-1) \rightarrow$

$V(3{,}1)$ e $p = 5$

Reta diretriz : $y = -4$

03. D

Desde que a parábola apresenta concavidade para baixo e intersecta o eixo das abscissas em dois pontos distintos, temos $a < 0$ e $b^2 - 4ac > 0$.

04. C

Basta calcularmos o deslocamento vertical das parábolas utilizando as diferenças da segunda coordenada de seus vértices em modulo, isto é:

$$V_g = \left(\frac{-b}{2a};\frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{8}{2};\frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right) = \left(\frac{8}{2};\frac{-(64)}{4}\right) =$$
$$= (4;-16)$$
$$V_f = \left(\frac{-b}{2a};\frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{2}{2};\frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right) = (1;-4) = (4;-16)$$
$$|-16| - |-4| = 12$$

05. D

Calculando:

Parábola $\Rightarrow$ Pontos $(5, 0)$ e $(4, 3)$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$b = 0 \Rightarrow$ parábola simétrica ao eixo y

$f(0) = c = H$

$$\begin{cases} 0 = a\cdot(5)^2 + H \\ 3 = a\cdot(4)^2 + H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 25a + H \\ -3 = -16a - H \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -3 = 9a \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow H = \frac{25}{3}$$

06. A

Desde que o gráfico intersecta o eixo x nos pontos de abscissa -5 e 5, e sendo (0, 10) o vértice da parábola, temos

$$10 = a\cdot(0^2 - 0\cdot 0 - 25) \Leftrightarrow a = -\frac{2}{5}.$$

Portanto, segue que o resultado é

$$y = -\frac{2}{5}\cdot(x^2 - 0\cdot x - 25) = -\frac{2}{5}x^2 + 10.$$

07. D

Calculando:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 100 \\ x\cdot y = S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ x\cdot y = S \end{cases} \Rightarrow x\cdot(50-x) =$$
$$= S \Rightarrow x_{máx} = y_{máx} = 25$$

08. D

Seja x o número de reais cobrados a mais pelo cabeleireiro. Tem-se que a renda, r, obtida com os serviços realizados é dada por

$$r(x) = (10+x)(200-10x)$$
$$= -10x^2 + 100x + 2.000.$$

Em consequência, o número de reais cobrados a mais para que a renda seja máxima é $-\frac{100}{2\cdot(-10)} = 5$ e, portanto, ele deverá cobrar por serviço o valor de 10 + 5 = R$ 15,00.

09. B

Calculando:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$b = 0 \Rightarrow$ parábola simétrica ao eixo y

Pontos da parábola $\Rightarrow$ do gráfico $\Rightarrow (0, 4)$ e $(-39, 30)$

$f(0) = c \Rightarrow c = 4$

$$f(-39) = 30 \Rightarrow a\cdot(-39)^2 + 4 = 30 \Rightarrow a = \frac{26}{1521} = \frac{2}{117}$$

10. D

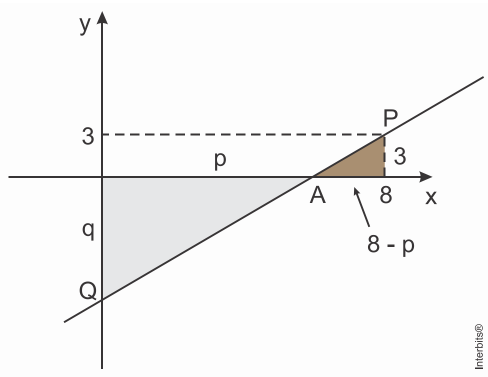
Sendo a temperatura máxima, $T_{máx}$, igual a $T_{máx} = -\frac{(4{,}8)^2}{4\cdot(-0{,}2)} = 28{,}8\ °C$ e U = 35, vem

$$I_A = \frac{35}{20} + \frac{27 - 28{,}8}{10} = 1{,}57.$$

Desse modo, no horário da temperatura máxima, a condição de ocorrência de incêndio era provável, já que $1 < 1{,}57 \leq 2$.

AULA 30

01. B



Considerando a figura acima, podemos escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{p \cdot q}{2} = 6 \\ \dfrac{3}{q} = \dfrac{3p}{8-p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \cdot q = 12 \\ q = \dfrac{3p}{8-p} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos a seguinte equação: $p^2 + 4p - 32 = 0,$ cujas raízes são p = –8 (não convém) e p = 4.
Concluímos então que A(4, 0).
Determinando agora a equação da reta que passa pelos pontos A(4, 0) e P(8, 3), temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x + 4y + 12 = 0$$

Portanto, a soma pedida será dada por:
- 3 + 4 + 12 = 13 (múltiplo de 13).

02. D

Determinando inicialmente a equação da reta que passa pelos pontos A e B.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -20 & 20 & 1 \\ 20 & -10 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 4y - 20 = 0$$

Calculando a distância do ponto P(0, 30) à reta que passa pelos pontos A e B.

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 30 - 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{100}{5} = 20\text{m}$$

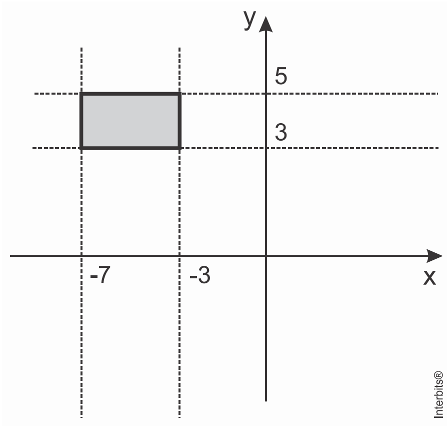
Como a escala é 1 : 200 a distância real pedida é de 20 · 200 = 4 000 m = 4 km.

03. E

$$|x+5| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x + 5 \leq 2 \Rightarrow -7 \leq x \leq -3$$

$$|y-4| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y - 4 \leq 1 \Rightarrow 3 \leq y \leq 5$$

Representando as duas regiões acima num mesmo sistema cartesiano e determinando a intersecção entre elas, temos a seguinte região:



Portanto, a alternativa [E].

04. E

A equação da reta AC pode ser escrita como:

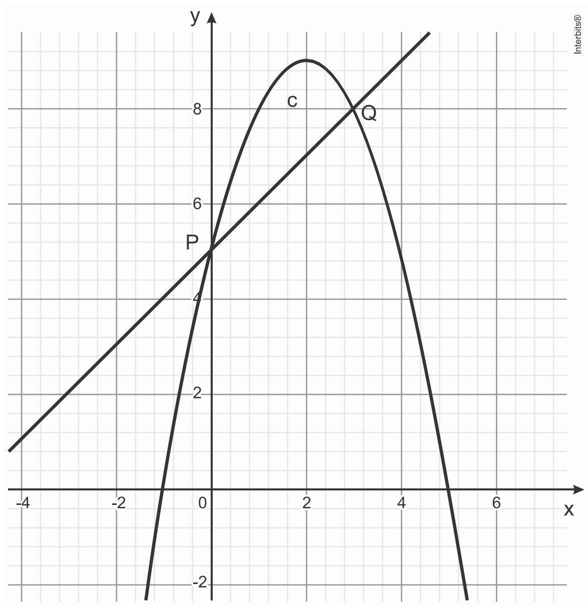
$$m = \frac{40-0}{10-0} = 4 \rightarrow y = 4x$$

$$h = \frac{(x+2) \cdot (40-4x)}{80} \rightarrow h = \frac{1}{20} \cdot \left(-x^2 + 8x + 20\right)$$

$$x_{máx} = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{-2} = 4$$

$$h_{máx} = \frac{1}{20} \cdot \left(-4^2 + 8 \cdot 4 + 20\right) \rightarrow h_{máx} = 1{,}80\text{ m}$$

05. D



Resolvendo um sistema com as equações da reta e da parábola, temos:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ y = x + 5 \end{cases}$$

$$x + 5 = -x^2 + 4x + 5$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 5$$

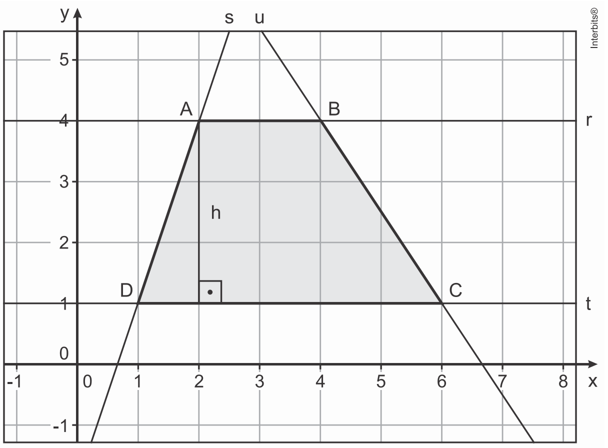
$$x = 3 \Rightarrow y = 8$$

Portanto, os pontos pedidos são P(0, 5) e Q(3, 8).
A distância entre eles será dada por:

$$d_{P,Q} = \sqrt{(3-0)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

06. C

Determinando, inicialmente, os pontos A, B, C e D representados na figura a seguir:



$r \cap s = \{A\}$

$$\begin{cases} y = 4 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2,4)$$

$r \cap u = \{B\}$

$$\begin{cases} y = 4 \\ 3x + 2y - 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(4,4)$$

$t \cap s = \{C\}$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 3x + 2y - 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(6,1)$$

$t \cap s = \{D\}$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 3x - y - 2 - 0 \end{cases} \Rightarrow D(1,1)$$

Portanto, a área S do quadrilátero (trapézio) será dada por:

$$S = \frac{(AB + CD) \cdot h}{2} = \frac{(2+5) \cdot 3}{2} = 10{,}5$$

07. B

Calculando:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$M(-3,3) \Rightarrow 9 + 9 - 3D + 3E + F = 0 \Rightarrow -3D + 3E + F = -18$

$N(2,8) \Rightarrow 4 + 64 + 2D + 8E + F = 0 \Rightarrow 2D + 8E + F = -68$

$O(6,0) \Rightarrow 36 + 6D + F = 0 \Rightarrow F = -36 - 6D$

$$\begin{cases} -9D + 3E = 18 \\ -4D + 8E = -32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 72D - 24E = -144 \\ -12D + 24E = -96 \end{cases} \Rightarrow 60D = -240 \Rightarrow D = -4 \Rightarrow F = -12 \Rightarrow E = -6$$

$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

$$x_c = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y_c = \frac{-6}{-2} = 3$$

$R = \sqrt{2^2 + 3^2 - (-12)} \Rightarrow R = 5$

$\text{Perímetro} = 2\pi R = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4 \text{ cm}$

08. A

O raio de luz refletido no ponto (1, 1) tem a direção da reta $4y - 3x = 1$. Já o raio refletido no ponto (2, 4) tem a direção da reta $8y - 15x = 2$. Desse modo, o ponto procurado é a solução do sistema

$$\begin{cases} 4y - 3x = 1 \\ 8y - 15x = 2 \end{cases}.$$

Resolvendo esse sistema, encontramos $x = 0$ e $y = \frac{1}{4}$.

Portanto, o ponto em que os raios de luz verticais refletidos em (1, 1) e (2, 4) se encontrarão é $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

09. E

A equação da elipse é:

$$\frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{30^2} = 1$$

Para $y = 24$, temos:

$$\frac{x^2}{50^2} + \frac{24^2}{30^2} = 1 \rightarrow x = 30 \rightarrow d_{PQ} = 2.30 = 60$$

10. E

$2a = 540 \rightarrow a = 270$

$2b = 140 \rightarrow b = 70$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 270^2 = 70^2 + c^2 \rightarrow$

$c^2 = 68000 = 4.1{,}7.10^4 \rightarrow c = \sqrt{4.1{,}7.10^4}$

$c = 2.100\sqrt{1{,}7} = 200.1{,}3 = 261$

$d_1 = a - c = 270 - 261 = 9$

$d = 9.10^7$