MATEMÁTICA 2 – VOLUME 2
RESOLUÇÕES – EXERCITANDO EM CASA

AULA 11

01. D

Escrevendo a lei de T na forma canônica, vem

$$\begin{aligned}T(h) &= -h^2 + 22h - 85 \\ &= -(h^2 - 22h + 85) \\ &= -[(h-11)^2 - 36] \\ &= 36 - (h-11)^2.\end{aligned}$$

Assim, a temperatura máxima é $36\,°C$, ocorrendo às 11 horas. Tal temperatura, segundo a tabela, é classificada como alta.

02. C

$$x_{máx} = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2\cdot(-2)} \Rightarrow x_{máx} = 2$$

$$h_{máx} = -2\cdot 2^2 + 8\cdot 2 \Rightarrow h_{máx} = 8\text{ m}$$

03. C

Seja $L = ax^2 + bx + c$, com L sendo o lucro obtido com a venda de x unidades. É fácil ver que $c = 0$. Ademais, como a parábola passa pelos pontos $(10, 1200)$ e $(20, 1200)$, temos

$$\begin{cases}100a + 10b = 1200 \\ 400a + 20b = 1200\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = -6 \\ b = 180\end{cases}.$$

Portanto, segue que

$$L = -6x^2 + 180x = 1350 - 6(x-15)^2.$$

O lucro máximo ocorre para $x = 15$ e é igual a R\$ 1.350,00.

04. B

Vamos admitir que $3x^2 + 232$ seja o custo de produção de x unidades e que $180x - 116$ seja o valor de venda destas x unidades. Considerando que L(x) seja a função do lucro, temos:

$L(X) = 180x - 116 - (3x^2 + 232)$
$L(x) = -3x^2 + 180x - 348$

Determinando o x vértice, temos o valor de x para o qual o lucro é máximo:

$$X_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-180}{2.(-3)} = 30$$

05. B

A medida do lado do triângulo equilátero é igual a $\frac{6}{3} = 2\text{cm}$. Logo, sua altura é $\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\text{cm}$. Além disso, o retângulo de base $x\text{cm}$ determina um triângulo equilátero de lado igual a $x\text{cm}$, com $0 < x < 2$. Por conseguinte, da semelhança dos triângulos equiláteros, vem

$$\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3} - y}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{2\cdot(\sqrt{3} - y)}{\sqrt{3}}.$$

A área, A, do retângulo é dada por

$$\begin{aligned}A &= x\cdot y \\ &= \frac{2\cdot(\sqrt{3}-y)}{\sqrt{3}}\cdot y \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Desde que a área é máxima, temos $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $x = 1$.

06. E

Calculando:

$y + 2x = 60 \Rightarrow y = 60 - 2x$

$S_{retângulo} = x\cdot y = x\cdot(60 - 2x) = 60x - 2x^2$

$$x_{máx} = \frac{-60}{2\cdot(-2)} \Rightarrow x_{máx} = 15 \Rightarrow y_{máx} = 30$$

$S_{retângulo} = 15\cdot 30 = 450\text{ m}^2.$

07. A

Seja X o número de lugares vagos. Logo, a receita, R, é dada por

$$R = (2x + 40)(50 - x) = -2(x + 20)(x - 50).$$

Donde segue que o número de lugares vagos para o qual a receita é máxima é

$$x_v = \frac{-20 + 50}{2} = 15.$$

Portanto, a resposta é $50 - 15 = 35$.

08. D

Considere a função $V(x) = C\,.\,x\,.\,(2R - x)$ escrita na forma $V(x) = 2CRx - Cx^2$.

Para que a velocidade seja máxima devemos ter

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2CR}{-2C} = R.$$

Então

$$V_{máx} = V(R) = 2CR\cdot R - CR^2$$

$$\boxed{V_{máx} = CR^2}$$

A velocidade a uma distância R/2 é igual a

$$V\left(\frac{R}{2}\right) = 2\cdot R\cdot C\cdot\frac{R}{2} - C\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$V\left(\frac{R}{2}\right) = C\cdot R^2 - \frac{CR^2}{4}$$

$$\boxed{V\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{3}{4}\cdot CR^2}$$

Então a velocidade a uma distância R/2 é igual a 75% da velocidade máxima.

09. B
Pode-se reescrever a função dada no enunciado:
$h - 120t + 5t^2 = 0 \to h = -5t^2 + 120t$

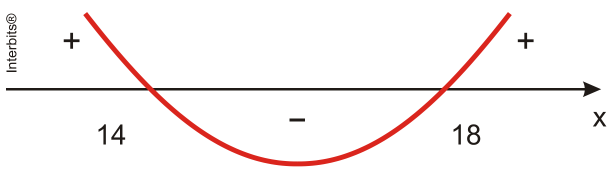
Sabendo que trata-se de uma função do segundo grau, seu gráfico será uma parábola cujo vértice (ponto máximo) representa a altura máxima atingida e o tempo decorrido desde o lançamento. Assim, a altura máxima $h_{máx}$ será dada pelo vértice da parábola, calculado pela fórmula:

$$h_{máx} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4a} = -\frac{120^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 0}{4 \cdot (-5)}$$
$$\to h_{máx} = 720 \text{ m}$$

De forma análoga, substituindo o valor de $h_{máx}$ e calculando a coordenada x do vértice, tem-se:
$$720 = -5t^2 + 120t \to -5t^2 + 120t - 720 = 0 \to$$
$$\to t^2 - 24t + 144$$
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{24}{2} \to x = 12 \text{ s}$$

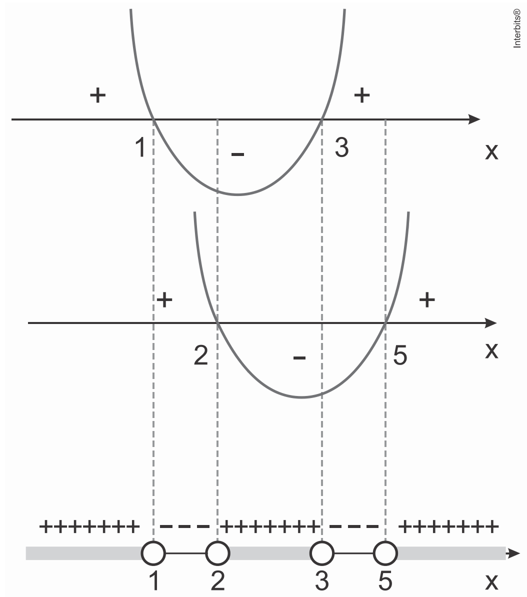
10. D
$$\frac{200}{0{,}5} = 400 \text{ clientes}$$
$$\text{Receita} = R = \left(n^{\underline{o}} \text{ clientes}\right) \times (0{,}5) \times \left(\text{preço do quilo}\right)$$
$$\text{preço do quilo} = 40 + n$$
$$n^{\underline{o}} \text{ clientes} = 400 - 8n$$
$$R = (400 - 8n) \cdot 0{,}5 \cdot (40 + n) \to R = -4n^2 + 40n + 8000$$
$$n_{vértice} = \frac{-40}{2 \cdot (-4)} = 5 \to \text{preço do quilo} = 40 + n = 45$$

AULA 12
01. B



Resolvendo a inequação temos 14 < x < 18, logo o valor de x par que pertence à solução é x = 16.

02. B
Fazendo o estudo do sinal de cada uma das funções e depois o sinal do quociente entre elas, temos:



Portando, a solução da inequação quociente será dada por:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3 \text{ ou } x > 5\}.$

03. E
Tem-se que
$$(5x^2 - 6x - 8)(2 - 2x) < 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{4}{5}\right)(x-1)(x-2) > 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{4}{5} < x < 1 \text{ ou } x > 2.$$

04. A
A receita r obtida com a venda dos pães é dada por $r = p(400 - 100p)$. Logo, queremos calcular o valor de p tal que $r \geq$ R\$ 300,00 e a quantidade q seja máxima. Assim, temos

$$p(400 - 100p) \geq 300 \Leftrightarrow p^2 - 4p + 3 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow 1 \leq p \leq 3.$$

A quantidade q é máxima quando p é mínimo. Portanto, segue que $p = 1$.

05. C
$$V_B < V_A$$
$$8 + 0{,}10 \cdot x^2 < 3 + 1{,}5x$$
$$0{,}10 \cdot x^2 - 1{,}5x + 5 < 0$$
$$x^2 - 15x + 50 < 0$$
Resolvendo a inequação, temos: 5 < x < 10.

Para as distâncias maiores que 5 km e menores que 10 km o preço da empresa B será menor que o preço da empresa A.

06. A

Queremos calcular os valores de x para os quais $L_B(x) > L_A(x)$ e $L_B(x) > L_C(x)$, ou seja,

$$10x + 20 > \frac{10}{9}x^2 - \frac{130}{9}x + \frac{580}{9} \text{ e}$$

$$\left| \begin{array}{l} 10x + 20 > 120 \text{ e } x < 15 \\ \qquad \text{ou} \qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \\ 10x + 20 > 10x - 30 \text{ e } x \geq 15 \end{array} \right.$$

$$(x-2)(x-20) < 0 \text{ e } \left| \begin{array}{l} 10 < x < 15 \\ \quad \text{ou} \\ x \geq 15 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$2 < x < 20$ e $x > 10 \Leftrightarrow 10 < x < 20.$

Portanto, o intervalo pedido é $]10, 20[$.

07. D

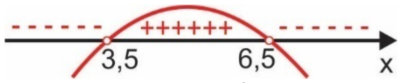
Sendo $p > 1$, vem

$$D(p) = F(p) \Rightarrow \frac{3p^2 - 21p}{4 - 2p} = \frac{5p - 10}{3}$$
$$\Rightarrow 19p^2 - 103p + 40 = 0$$
$$\Rightarrow p = 5.$$

08. D

Para que o lucro seja superior a R$ 22.750,00 faremos L(x) > 22,75.

$$-x^2 + 10x > 22,75 \Rightarrow -x^2 + 10x - 22,75 > 0$$



O lucro será superior a R$ 22.750,00 quando o número de peças produzidas e vendidas estiver entre 3.500 e 6.500 unidades.

09. A

Sabemos que o comprimento da tela é 35 m. Então

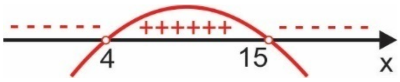
$x + y + x - 1 + x - 2 = 35 \Rightarrow y = 19 - x$

A área da região de lazer deve ser maior que 58 m². Então:

$x \cdot y - 2 \cdot 1 > 58$

$x \cdot (19 - x) - 2 > 58$

$-x^2 + 19x - 60 > 0$



$4 < x < 15$

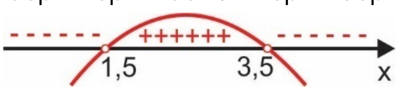
10. C

A receita diária R será:

$R = y \cdot p \Rightarrow R = (90 - 20p) \cdot p \Rightarrow \boxed{R = 90p - 20p^2}$

Como a receita deve ser maior do que R$ 90,00 então:

$90p - 20p^2 > 90 \Rightarrow -20p^2 + 90p - 90 > 0$



Então o valor de p deve ser tal que R\$ $1,50 < p <$ R\$ $3,00$.

AULA 13

01. D

Valor da conta em abril: R$ 32,00.
Valor da conta em maio: 32 + 5 x 5 = R$ 57,00.
Aumento de R$ 25,00.

$$\begin{array}{l} 32 \to 100\% \\ 25 \to \ x\% \end{array} \Rightarrow 32x = 2500 \Rightarrow \boxed{x = 78,125\%}$$

02. D

Sejam $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, respectivamente, as funções que associam os custos totais, em reais, nos planos Superminutos e Supertarifa, a um consumo de t minutos. Logo, tem-se que

$$f(t) = \begin{cases} 100, \text{ se } 0 \leq t \leq 200 \\ 0,6t - 20, \text{ se } t > 200 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(t) = 0,4t + 60.$$

Para $t \leq 200$, o plano Superminutos é mais barato do que o plano Supertarifa se
$0,4t + 60 > 100 \Leftrightarrow t > 100.$

Para $t > 200$, o plano Superminutos é mais barato do que o plano Supertarifa se
$0,6t - 20 < 0,4t + 60 \Leftrightarrow t < 400.$

Em consequência, o plano Superminutos certamente será selecionado para consumidores que usarem entre 100 e 400 minutos no mês.

03. B

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a função que relaciona o valor mensal pago, $f(x)$, com o número de ligações, x, efetuadas no mês. Tem-se que

$$f(x) = \begin{cases} 12, \text{ se } 0 \leq x < 100 \\ 0,1 \cdot (x - 100) + 12, \text{ se } 100 \leq x < 300 \\ 32, \text{ se } 300 \leq x \leq 500 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 12, \text{ se } 0 \leq x < 100 \\ 0,1 \cdot x + 2, \text{ se } 100 \leq x < 300. \\ 32, \text{ se } 300 \leq x \leq 500 \end{cases}$$

Portanto, dentre os gráficos apresentados, só pode ser o da alternativa [B].

04. C

A lei da função c é dada por:

$$c(x) = \begin{cases} 20, \text{ se } 0 \leq x \leq 10 \\ 20 + 4(x - 10), \text{ se } x > 10 \end{cases}$$

$$c(x) = \begin{cases} 20, \text{ se } 0 \leq x \leq 10 \\ 4x - 20, \text{ se } x > 10 \end{cases}$$

05. C

Seja $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$C(t) = \begin{cases} 39, \text{ se } 0 \leq t < 50 \\ 39 + 0,19(t - 50), \text{ se } t \geq 50 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 39, \text{ se } 0 \leq t < 50 \\ 0,19t + 29,5, \text{ se } t \geq 50 \end{cases},$$

em que $C(t)$ é o valor a ser pago pelos clientes que optarem pelo plano A, e t é o número de minutos utilizados.
Assim, o gráfico que melhor representa a função C é o da alternativa [C].

06. C
De acordo com as informações, obtemos a função $p: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$p(n) = \begin{cases} 120 - \dfrac{n}{20}, \text{ se } 0 < n < 500 \\ 95, \text{ se } n \geq 500 \end{cases},$$

em que $p(n)$ é o preço unitário de n uniformes.
Portanto, a empresa E_1 pagou

$$\begin{aligned} 400 \cdot p(400) &= 400 \cdot \left(120 - \frac{400}{20}\right) \\ &= \text{R\$ } 40.000,00, \end{aligned}$$

enquanto que a empresa E_2 pagou

$$\begin{aligned} 600 \cdot p(600) &= 600 \cdot 95 \\ &= \text{R\$ } 57.000,00. \end{aligned}$$

07. C
Como a vazão das bombas de gasolina é constante, segue que para $0 \leq t \leq 5$ a lei da função V é da forma $V(t) = at + b$. Daí, como o tanque tinha 10 litros no instante t = 0, e a vazão das bombas é de 3L/min, concluímos que $V(t) = 3t + 10$.
Sabendo que nos próximos 95 minutos o gráfico de V é parte do ramo de uma parábola cujo vértice é o ponto (100, 0), temos que a lei de V, para $5 < t \leq 100$, é da forma $V(t) = a \cdot (t - 100)^2$.
Assim, como $V(5) = 3 \cdot 5 + 10 = 25$ L, vem

$$V(5) = a \cdot (5 - 100)^2 \Rightarrow a = \frac{25}{95 \cdot 95} = \frac{1}{361}.$$

Portanto,

$$V(t) = \begin{cases} 10 + 3t, \text{ se } 0 \leq t \leq 5 \\ \dfrac{1}{361} \cdot (t - 100)^2, \text{ se } 5 < t \leq 100 \end{cases}.$$

08. D
1ª Solução:
Temos que:
i) para $0 \leq t < 20$, vem

$$\frac{t}{5} + 8 \geq 12 \Leftrightarrow t \geq 20.$$

Logo, $[0, 20[\cap [20, +\infty[= \varnothing$.
ii) para $20 \leq t < 50$, encontramos

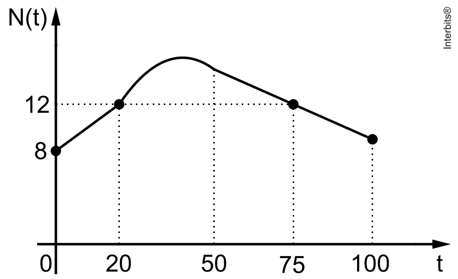
$$\begin{aligned} -\frac{t^2}{100} + \frac{4t}{5} \geq 12 &\Leftrightarrow t^2 - 80t \leq 1200 \\ &\Leftrightarrow (t - 40)^2 \leq 2800 \\ &\Leftrightarrow -20\sqrt{7} + 40 \leq t \leq 20\sqrt{7} + 40. \end{aligned}$$

Então, $[20, 50[\cap [-20\sqrt{7} + 40, 20\sqrt{7} + 40[= [20, 50[$.
iii) para $50 \leq t \leq 100$, vem

$$-\frac{3t}{25} + 21 \geq 12 \Leftrightarrow t \leq 75.$$

Daí, $[50, 100[\cap]-\infty, 75] = [50, 75]$.
Portanto, como
$\varnothing \cup [20, 50[\cup [50, 75] = [20, 75]$,
segue que o número de dias, dentro do período chuvoso, em que a altura do nível da represa é maior do que ou igual a 12 metros é dado por 75 – – 20 + 1 = 56.

2ª Solução:
Esboçando o gráfico da função N, obtemos a figura abaixo.



Portanto, segue que o número de dias, dentro do período chuvoso, em que a altura do nível da represa é maior do que ou igual a 12 metros é dado por 75 – 20 + 1 = 56.

09. C
Preço do pacote azul em função dos de minutos de uso.

$$P(x) = \begin{cases} 80, \text{ se } x \leq 100 \\ 80 + 0,90.(x - 100), \text{ se } x > 100 \end{cases}$$

Preço do pacote laranja em função dos de minutos de uso.

$$P(x) = \begin{cases} 143, \text{ se } x \leq 300 \\ 143 + 0,40.(x - 300), \text{ se } x > 300 \end{cases}$$

Comparação dos pacotes:
Se $x \leq 100$ o pacote azul será mais vantajoso.
Se $100 < x \leq 300$ o pacote laranja será mais vantajoso se:

$$143 < 80 + 0,9(x - 100) \Rightarrow 143 > 80 + 0,9x - 90$$
$$\Rightarrow x > 170$$

Portanto $170 < x \leq 300$.
Se x > 300, o pacote laranja sai mais vantajoso se:

$$143 + 0,4(x - 300) < 80 + 0,9(x - 100)$$
$$\Rightarrow 143 + 0,4x - 120 < 80 + 0,9x - 90$$
$$\Rightarrow x > 66$$

Portanto, x > 300.
Logo, para ser mais vantajoso contratar o pacote laranja, comparativamente ao pacote azul, o número mínimo de minutos de ligação que o usuário deverá fazer é 171.

10. C

Resolvendo a equação, temos:

$$\frac{n}{200}\cdot x-\frac{n^2+n-8}{2}=\frac{x}{100}+4$$

$$nx-100n^2-100n+800=2x+800$$

$$x(n-2)=100\cdot(n^2+n)$$

$$x=\frac{100\cdot(n^2+n)}{n-2}$$

Se $n = 3 \Rightarrow x = 1200$, não convém, pois $200\cdot 3 < 1200 \le 200\cdot(3 + 1)$ é falsa.
Se $n = 4 \Rightarrow x = 1000$, convém, pois $200\cdot 4 < 1000 \le 200\cdot(4 + 1)$ é verdadeira.
Se $n = 5 \Rightarrow x = 1000$, não convém, pois $200\cdot 5 < 1000 \le 200\cdot(5 + 1)$ é falsa.
Assim sendo, ambos estarão à mesma velocidade após terem percorrido 100 m.

AULA 14

01. E

Fazendo os cálculos:

$$s(t)=1.800\cdot(1{,}03)^t$$

$$s(2)=1.800\cdot(1{,}03)^2$$

$$s(2)=1909{,}62$$

02. C

Sendo $f(x)$ o número de células após x divisões, com $x\in\{1,2,3,4,\dots\}=\mathbb{N}^*$ e $f(x)\in\{2,4,6,8,\dots\}$, só pode ser, dentre as funções apresentadas, a da alternativa [C].

03. A

Tem-se que $N_0=0{,}4\cdot 60000=24000$.

O número previsto de vítimas, nos acidentes com motos, para 2015 é dado por

$$N(3)=24000\cdot(1{,}2)^3=41.472.$$

04. C

Sabendo que $N(898)=\frac{1}{2}N_0$, temos

$$N(898)=\frac{1}{2}N_0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}N_0=N_0e^{-898\alpha}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\alpha}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{898}}.$$

Queremos calcular o valor de t para o qual se tem $N(t)=\frac{1}{4}N_0$. Daí, segue que

$$N(t)=\frac{1}{4}N_0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}N_0=N_0(e^{-\alpha})^t$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{898}}$$

$$\Leftrightarrow t=1796\cdot$$

Portanto, o resultado está entre 1500 e 2000 anos.

05. D

Após 2 horas, teremos:

$$3\cdot N_0=N_0\cdot e^{2t}\Rightarrow e^{2t}=3$$

Após 6 horas, teremos:

$$N(6)=N_0\cdot e^{6t}=N_0\cdot\left(e^{2t}\right)^3=N_0\cdot(3)^3=27\cdot N_0$$

Portanto, a resposta correta será a alternativa [D], 27 vezes.

06. C

Se $f(0)=60000$, então $b=60000$. Ademais, sabendo que $f(1)=54000$, vem

$$54000=60000\cdot a^1 \Leftrightarrow a=\frac{9}{10}.$$

Por conseguinte, a resposta é

$$f(2)=60000\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2=\text{R\$ }48.600{,}00.$$

07. C

Com os valores do gráfico e do enunciado, pode--se escrever:

$$y=a^x$$

$$0{,}2=a^1\to a=0{,}2\to y=0{,}2^x$$

$$y=0{,}2^{-0{,}5}=\left(\frac{2}{10}\right)^{-0{,}5}=\left(\frac{10}{2}\right)^{0{,}5}=(5)^{0{,}5}=\sqrt{5}$$

08. C

$$N(t)=C\cdot A^t$$

$$N(0)=C\cdot A^0=400\to C=400$$

$$N(3)=400\cdot A^3=50\to A^3=\frac{1}{8}\to A=\frac{1}{2}$$

$$N(4)=400\cdot\left(1/2\right)^4\to N(4)=25$$

09. E

Tem-se que

$$12000=6000\cdot e^{k\cdot 20}\Leftrightarrow e^{20k}=2.$$

Logo, para $t=1\,h=60$ minutos, vem

$$Q(60)=6000\cdot e^{k\cdot 60}=6000\cdot(e^{20k})^3=6000\cdot 8=4{,}8\times 10^4.$$

10. E

$y = 363.e^{0{,}03.30} \Leftrightarrow y = 363.e^{0{,}9} \Leftrightarrow y = 363.(e^{0{,}3})^3 \Leftrightarrow y = 363.(1{,}35)^3 \approx 893$ $(870 < 893 < 910)$

AULA 15

01. C

Para $t=0\Rightarrow V(0)=1000\cdot 2^{0{,}0625\cdot(0)}=1000$

Logo,

Para $t=?\Rightarrow V(t)=2000$

$\Rightarrow 2000 = 1000 \cdot 2^{0,0625\cdot(t)}$

$\Rightarrow 2^{0,0625\cdot(t)} = 2$

$\Rightarrow 0,0625\cdot(t) = 1$

$\Rightarrow t = 16$

02. E

Se $B(t) = 810,$ então podemos escrever:

$B(t) = 810 = 10\cdot 3^{t-1} \to 3^{t-1} = 81$

Por dedução, o expoente de 3 cujo resultado da potência resultam em 81 é 4, pois $3^4 = 81.$

Assim, tem-se que $t - 1 = 4,$ logo $t = 5$ horas.

03. C

$T = 160\cdot 2^{-0,8\cdot t} + 25$

$65 = 160\cdot 2^{-0,8\cdot t} + 25$

$40 = 160\cdot 2^{-0,8\cdot t}$

$2^{-0,8t} = 1/4$

$2^{-0,8t} = 2^{-2}$

$-0,8\cdot t = -2$

$t = 2,5$ minutos.

04. B

Vamos determinar t de modo que N(t) seja 678, resolvendo a equação abaixo:

$9^t - 2\cdot 3^t + 3 = 678$

$\left(3^t\right)^2 - 2\cdot 3^t - 675 = 0$

$3^t = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{2704}}{2\cdot 1}$

$3^t = 27 \Rightarrow 3^t = 3$

ou

$3^t = -25$ (não convém)

Resposta: $t = 3$ horas.

05. D

Para $t = 3,3$ h sabe-se que $q = 5$ g. Logo,

$$5 = 10\cdot 2^{k\cdot 3,3} \Leftrightarrow 2^{3,3k} = 2^{-1}$$
$$\Leftrightarrow 3,3k = -1$$
$$\Leftrightarrow k = -\frac{10}{33}.$$

06. D

Queremos calcular o valor de t para o qual $N(t) = 7000.$ Logo,

$500\cdot 2^t = 7000 \Leftrightarrow 2^t = 14.$

Portanto, como $8 < 14 < 16 \Leftrightarrow 2^3 < 2^t < 2^4,$ segue que $t \in]3, 4[.$

07. B

De acordo com as informações, vem

$\dfrac{N_0}{4} = N_0\cdot 2^{k\cdot 10} \Leftrightarrow 2^{10k} = 2^{-2} \Leftrightarrow k = -5^{-1}.$

08. B

Sabendo que a meia-vida da droga é de $1\,h = 60min,$ temos que:

$q(60) = \dfrac{300}{2} \Leftrightarrow 150 = 300\cdot 2^{-k\cdot 60} \Leftrightarrow 2^{-60k} = 2^{-1}$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{1}{60}.$

Desse modo, a quantidade da droga presente no organismo desse animal imediatamente antes de se aplicar a segunda dose é:

$q(30) = 300\cdot 2^{-\frac{1}{60}\cdot 30} = 300\cdot 2^{-\frac{1}{2}} = 150\sqrt{2}\,mg.$

De acordo com o enunciado, o animal fica sedado se $10\cdot 20mg = 200mg$ da droga estiverem presentes em seu organismo. A fim de manter o animal sedado por mais 30 minutos, temos que a quantidade de droga presente no organismo desse animal, adicionada à quantidade da segunda dose, deve ser tal que

$$q(30) \geq 200mg \Leftrightarrow q_0\cdot 2^{-\frac{1}{60}\cdot 30} \geq 200 \Leftrightarrow q_0 \geq 200\sqrt{2}\,mg.$$

Portanto, sabendo que após 30 minutos da aplicação da primeira dose havia $150\sqrt{2}\,mg$ da droga no organismo do animal (item (a)), segue que a quantidade de droga na segunda dose deve ser de:

$200\sqrt{2} - 150\sqrt{2} = 50\sqrt{2}\,mg.$

09. A

A distância entre as hastes é $2B,$ pois O é o ponto médio de $AB.$ Logo,

$$f(B) = 2,5 \Leftrightarrow 2^B + \left(\frac{1}{2}\right)^B = 2,5$$
$$\Rightarrow 2^{2B} - 2,5\cdot 2^B + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (2^B - 1,25)^2 - 1,5625 + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (2^B - 1,25)^2 = 0,5625$$
$$\Rightarrow 2^B - 1,25 = \pm 0,75$$
$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2^B = 2 \\ \text{ou} \\ 2^B = 0,5 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} B = 1 \\ \text{ou} \\ B = -1 \end{array} \right. .$$

Como $B > 0,$ segue que $2B = 2\cdot 1 = 2$ m.

10. B

Seja n o número de acertos do aluno.

A cada acerto, o aluno fica com seus pontos multiplicados por $\dfrac{3}{2};$ e a cada erro, fica com seus pontos multiplicados por $\dfrac{1}{2}.$

Desse modo, sabendo que o aluno ficou devendo 13 pontos, temos que

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-n} \cdot 256 = 243 \Leftrightarrow 3^n = 3^5 \Leftrightarrow n = 5.$$

Portanto, o aluno acertou 5 perguntas e errou $8-5=3$.

AULA 16

01. A

Queremos calcular o menor valor de t para o qual se tem $f(t) \geq 64000$. Assim, vem que

$$1000 \cdot 2^{\frac{2t}{3}} \geq 64000 \Leftrightarrow 2^{\frac{2t}{3}} \geq 2^6 \Leftrightarrow t \geq 9.$$

02. B

Como o número de esferas acrescentadas a cada etapa cresce segundo uma progressão geométrica de razão 2, segue que, após n etapas, o volume ocupado pelas esferas é igual a $0,5 \cdot 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2-1}$. Daí, o número de etapas necessárias para que o volume total de esferas seja maior do que o volume do recipiente é tal que

$$0,5 \cdot 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2-1} > 40 \cdot 25 \cdot 20 \Leftrightarrow 2^n > 40 \cdot 1000 + 1$$

$$\Rightarrow 2^n > 40 \cdot 2^{10} + 1.$$

Como $2^5 < 40 < 2^6$, segue que $n = 16$.

03. B

V(45) = 60.000. $2^{-\frac{45}{15}} \Leftrightarrow$ V(45) = 60.000.2^{-3} = 60.000.(1/8) = 7500

Resposta R$ 7.500,00.

04. B

Substituindo:

$$128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \geq 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \geq \frac{1}{64} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Leftrightarrow$$

$$\frac{t}{2} \leq 6 \Leftrightarrow \boxed{t \leq 12}$$

05. B

Se a quantidade inicial x_0 se reduz à metade em 2 horas então:

$$\frac{1}{2} \cdot x_0 = x_0 e^{\frac{k2}{2}} \Leftrightarrow e^k = \frac{1}{2}$$

Daí após 5 horas teremos:

$$x = x_0 e^{\frac{k5}{2}} \Leftrightarrow x = x_0 \left(e^k\right)^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x = x_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow$$

$$x = x_0 \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = x_0 \frac{1}{\sqrt{32}} \Leftrightarrow x = x_0 \frac{\sqrt{2}}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = x_0 \frac{1,41}{8} \Leftrightarrow \boxed{x \cong 17,7\% \cdot x_0}$$

06. D

Calculando o número inicial de bactérias, temos:

$N(0) = 20 \cdot 2^{1,5 \cdot 0} = 20$

Vamos determinar o valor de t em horas de modo que o número de bactérias seja 40.

$40 = 20 \cdot 2^{1,5 \cdot t}$.

$2 = 2^{1,5 \cdot t}$

$1,5 \cdot t = 1$

$t = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}h$

$\frac{2}{3}h = \frac{2 \cdot 60 min}{3} = 40 \text{ min}$

07. A

Considerando $B(t) = 6,4 \cdot 10^{10}$, temos a seguinte equação:

$6,4 \cdot 10^{10} = 10^9 \cdot 4^{3t} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4^{3t} = \frac{6,4 \cdot 10^{10}}{10^9} \Rightarrow 4^{3t} = 64 \Rightarrow 4^{3t} = 4^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3t = 3 \Rightarrow t = 1h.$

08. B

$$160 = 5 \cdot 2^{\frac{t}{3}} \Rightarrow 32 = 2^{\frac{t}{3}} \Rightarrow 2^5 = 2^{\frac{t}{3}} \Rightarrow \frac{t}{3} = 5 \Rightarrow t = 15$$

Resposta 15 horas.

09. C

Determinando $m_0 = c.a^{-k.0} \Leftrightarrow m_o = c$.

Como em 10 anos m_0 foi reduzido para 0,2 m_0, temos:

$0,2.m_0 = m_0.a^{-10k}$

$a^{-10k} = \frac{1}{5}$

Em 10 anos:

M(20) =

$m_0.a^{-20.k} = m_0.\left(a^{-10k}\right)^2 = m_0.\left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0,04.m_0$

Correspondendo a 4% de m_0.

10. A

$y = y_0.\ 2^x$

$y = 20.000\ .2^x$

$819.200.000 = 200.000.2^x$

$4096 = 2^x$

$2^{12} = 2^x$

$x = 12.$

AULA 17

01. E

$Q = \log_2 d$

$d = 16$

$Q = \log_2 16 = \log_2 2^4 \rightarrow Q = 4.$

02. A

Determinando o aumento percentual depois de 60 minutos (1 hora), temos:

$B(60) = -30 \cdot \log_3(60 + 21) + 150 = -30 \cdot 4 + 150 = 30$

Portanto, o número de bactérias após uma hora será dado por:

$250 \cdot \left(1 + \frac{30}{100}\right) = 250 \cdot 1{,}3 = 325.$

03. A

Número inicial no visor = x

Tecla $B = 5x$

Tecla $A = \log_{10}(5x)$

Tecla $B = 5 \cdot (\log_{10}(5x)) = 10 \to \log_{10}(5x) = 2 \to$

$\to 5x = 10^2 \to x = \frac{100}{5} = 20.$

04. D

Calculando:

$P_{máx} = 400$

$400 = \frac{5000 \cdot 1{,}013^n \cdot 0{,}013}{(1{,}013^n - 1)} \Rightarrow$

$400 \cdot (1{,}013^n - 1) = 65 \cdot 1{,}013^n \Rightarrow$

$400 \cdot 1{,}013^n - 400 = 65 \cdot 1{,}013^n$

$335 \cdot 1{,}013^n = 400 \Rightarrow 1{,}013^n = \frac{400}{335} \Rightarrow$

$\log 1{,}013^n = \log\left(\frac{400}{335}\right) \Rightarrow n \cdot \log 1{,}013 =$

$= \log 400 - \log 335$

$n \cdot 0{,}005 = 2{,}602 - 2{,}525 \Rightarrow n = 15{,}4 \Rightarrow 16$ parcelas

05. C

Tem-se que

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right) \Leftrightarrow \log\left(\frac{E}{E_0}\right) = \frac{3M}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{\frac{3M}{2}}$$

$$\Leftrightarrow E = E_0 \cdot 10^{\frac{3M}{2}}.$$

Daí, como $M_1 = 9$ e $M_2 = 7$, vem $E_1 = E_0 \cdot 10^{\frac{27}{2}}$ e $E_2 = E_0 \cdot 10^{\frac{21}{2}}$.

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \cdot 10^{\frac{27}{2}} \\ &= E_0 \cdot 10^{\frac{21}{2}} \cdot 10^{\frac{6}{2}} \\ &= 10^3 \cdot E_2. \end{aligned}$$

06. B

Para que a população brasileira seja 90% da suposta população de estabilização, deveremos ter

$0{,}9 \cdot 280 = 280 - 190 \cdot e^{-0{,}019(t-1970)}$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}019(t-1970)} = \frac{14}{95}$

$\Leftrightarrow \ell n\, e^{-0{,}019(t-1970)} = \ell n \frac{14}{95}$

$\Rightarrow -0{,}019(t - 1970) = -1{,}9$

$\Leftrightarrow t - 1970 = \frac{1{,}900}{0{,}019}$

$\Leftrightarrow t = 2070.$

07. D

Fazendo x = 12,5, temos:

$\log\left(\frac{L}{15}\right) = -0{,}08 \cdot 12{,}5 \Leftrightarrow \log\left(\frac{L}{15}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{L}{15} = 10^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow L = 1{,}5$

lumens.

08. D

$M = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right) \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{10^{4,5}}\right) = 9$

$\Rightarrow \log_{10}\left(\frac{E}{10^{4,5}}\right) = \frac{3 \times 9}{2} \Rightarrow 10^{13,5} = \frac{E}{10^{4,5}} \Rightarrow E = 10^{18}$

09. A

Basta substituir o valor procurado na equação. Primeiramente note o valor de 2015

$Q(t) = 3{,}2 \cdot (1{,}2)^t \Rightarrow Q(0) = 3{,}2 \cdot (1{,}2)^0 \Rightarrow Q(0) = 3{,}2$

Aplicando o valor procurado:

$Q(t) = 3{,}2 \cdot (1{,}2)^t \Rightarrow 6{,}64 = 3{,}2 \cdot (1{,}2)^t \Rightarrow$

$\Rightarrow 2{,}075 = (1{,}2)^t \Rightarrow \log_{1,2}(2{,}075) = t$

Aplicando todos os valores de t possíveis para as alternativas temos:

$t = 1 \Rightarrow (1{,}2)^1 = 1{,}2$

$t = 2 \Rightarrow (1{,}2)^2 = 1{,}44$

$t = 3 \Rightarrow (1{,}2)^3 = 1{,}728$

$t = 4 \Rightarrow (1{,}2)^4 = 2{,}0736$

Logo, como $t = 0$ corresponde ao ano de 2015 o ano correto seria de 2019.

10. E

Seja k, com $0 < k < 1$, a abscissa do ponto para o qual se tem $\log k = -\frac{h}{2}$, ou seja, $h = -2 \cdot \log k$. Assim, temos $\frac{h}{2} = \log(n + k)$, isto é, $h = 2 \cdot \log(n + k)$. Daí, vem

$$2 \cdot \log(n+k) = -2 \cdot \log k \Leftrightarrow \log(n+k) \cdot k = \log 1$$
$$\Leftrightarrow k^2 + nk - 1 = 0$$
$$\Rightarrow k = \frac{-n+\sqrt{n^2+4}}{2}.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} h &= 2 \cdot \log(n+k) \\ &= 2 \cdot \log\left(n + \frac{-n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right). \end{aligned}$$

AULA 18

01. E

Para
$t = ? \Rightarrow P(t) = 3P(0)$

$P(0) = 250 \cdot (1{,}2)^{\frac{0}{5}} \Rightarrow P(0) = 250$

Logo,

$P(t) = 3P(0) \Rightarrow 250 \cdot (1{,}2)^{\frac{t}{5}} = 3 \times 250 \Rightarrow (1{,}2)^{\frac{t}{5}} = 3$

Aplicando logaritmos, temos:

$$\Rightarrow \log(1{,}2)^{\frac{t}{5}} = \log 3$$
$$\Rightarrow \frac{t}{5}\log\left(\frac{12}{10}\right) = \log 3$$
$$\Rightarrow \frac{t}{5}(\log 12 - \log 10) = \log 3$$
$$\Rightarrow \frac{t}{5}(2\log 2 + \log 3 - \log 10) = \log 3$$
$$\Rightarrow \frac{t}{5}(2 \times (0{,}3) + 0{,}48 - 1) = 0{,}48$$
$$\Rightarrow \frac{t}{5}(0{,}08) = 0{,}48 \Rightarrow t = 30 \text{anos}.$$

02. D

$$V = V_0 \cdot (1-i)^t \to 120000 \cdot (1-0{,}7) = 120000 \cdot (1-0{,}1)^t \to$$
$$0{,}3 = 0{,}9^t \to \log 0{,}3 = \log 0{,}9^t \to \log\frac{3}{10} = t \cdot \log\frac{3^2}{10} \to$$
$$\to \log 3 - \log 10 = t \cdot (2 \cdot \log 3 - \log 10) \to$$
$$\to 0{,}477 - 1 = t \cdot (2 \cdot 0{,}477 - 1) \to t = 11{,}37 \text{ anos}.$$

03. B

Desde que $\log ab = \log a + \log b$, $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$ e $\log a = b \Leftrightarrow a = 10^b$, para quaisquer a e b reais positivos, temos

$$8{,}9 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \Leftrightarrow \log\left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right) = 13{,}35$$
$$\Leftrightarrow \log E - \log 7 \cdot 10^{-3} = 13{,}35$$
$$\Leftrightarrow \log E = 13{,}35 + \log 7 - 3\log 10$$
$$\Rightarrow \log E = 13{,}35 + 0{,}84 - 3$$
$$\Rightarrow E = 10^{11{,}19} \text{ kWh}.$$

04. E

Sendo V_0 o volume inicial do líquido e V o volume após um determinado tempo t, podemos escrever a seguinte função com as informações do problema.

$V = V_0 \cdot (0{,}96)^t$

Admitindo que $V = \frac{V_0}{4}$, temos a seguinte equação na incógnita t.

$$\frac{V_0}{4} = V_0 \cdot (0{,}96)^t \Rightarrow \frac{1}{4} = (0{,}96)^t \Rightarrow 2^{-2} = (0{,}96)^t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log 2^{-2} = \log(0{,}96)^t \Rightarrow -2\log 2 = t \cdot \log\left(\frac{96}{100}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -0{,}6 = t \cdot (\log 96 - \log 100) \Rightarrow$$
$$-0{,}6 = t \cdot (\log(2^5 \cdot 3) - 2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -0{,}6 = t \cdot (5 \cdot \log 2 + \log 3 - 2) \Rightarrow$$
$$-0{,}6 = t \cdot (5 \cdot 0{,}3 + 0{,}48 - 2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -0{,}6 = t \cdot (-0{,}02) \Rightarrow t = 30 \text{ horas}.$$

05. C

A quantidade Q da substância no organismo, em $\mu g/mL$, após t minutos, pode ser dada por $Q = Q_0 \cdot e^{k \cdot t}$, com *e* sendo o número de Euler. Logo, se a concentração inicial é $6\ \mu g/mL$ e 48min depois passa a ser de $2\ \mu g/mL$, então

$2 = 6 \cdot e^{k \cdot 48} \Leftrightarrow e^k = 3^{-\frac{1}{48}}$.

Portanto, a meia-vida da cisplatina é tal que

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 \cdot (3^{-\frac{1}{48}})^t \Leftrightarrow \ell n\ 2^{-1} = \ell n\ 3^{-\frac{t}{48}}$$
$$\Leftrightarrow -\ell n\ 2 = -\frac{t}{48} \cdot \ell n\ 3$$
$$\Rightarrow t = \frac{0{,}7}{1{,}1} \cdot 48$$
$$\Rightarrow t \cong 31 \text{min}.$$

06. E

Queremos calcular t para o qual se tem $M(t) = 0{,}1 \cdot A$.

Sabendo que a meia-vida do césio-137 é 30 anos, encontramos

$$M(30) = \frac{A}{2} \Leftrightarrow A \cdot (2{,}7)^{k \cdot 30} = \frac{A}{2}$$
$$\Leftrightarrow (2{,}7)^k = 2^{-\frac{1}{30}}.$$

Assim, tomando 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$, vem

$$M(t) = 0{,}1 \cdot A \Leftrightarrow A \cdot [(2{,}7)^k]^t = 0{,}1 \cdot A$$
$$\Leftrightarrow \left(2^{-\frac{1}{30}}\right)^t = 10^{-1}$$
$$\Leftrightarrow \log 2^{-\frac{t}{30}} = \log 10^{-1}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{t}{30} \cdot \log 2 = -1 \cdot \log 10$$
$$\Rightarrow -\frac{t}{30} \cdot 0{,}3 \cong -1$$
$$\Rightarrow t \cong 100,$$

ou seja, o resultado procurado é, aproximadamente, 100 anos.

07. C

$$V(t) = V_0 \cdot 2^{-t}$$
$$0{,}1 \cdot V_0 = V_0 \cdot 2^{-t}$$
$$0{,}1 = 2^{-t}$$

Aplicando logaritmo na base 10 nos dois membros da igualdade, temos:

$$\log 0{,}1 = \log 2^{-t}$$
$$-1 = -t \cdot \log 2$$
$$-1 = -t \cdot 0{,}3$$
$$t = 3{,}3333333...$$

Utilizando uma casa decimal, como foi pedido no enunciado encontramos o seguinte valor para t.

$t = 3{,}3\text{h} = 3\text{h e } (0{,}3 \cdot 60)\text{min} = 3\text{h e } 18\text{min}$.

08. B

$$Q(t) = Q_0 e^{-0{,}023t}$$
$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 \cdot e^{-0{,}023 \cdot t}$$
$$\ell n\left(\frac{1}{2}\right) = \ell n e^{-0{,}023 \cdot t}$$
$$-\ell n 2 = -0{,}023 \cdot t$$
$$-0{,}69 = -0{,}023 \cdot t$$
$$t = 30.$$

09. A

Determinando o valor de t quanto N(t) = 20 000, temos:

$$2000 = \frac{20000}{2 + 15.4^{-2t}}$$
$$2 + 15 \cdot 2^{-4t} = 10$$
$$15 \cdot 2^{-4t} = 8$$
$$2^{-4t} = \frac{8}{15}$$
$$2^{-4t} = \frac{16}{30}$$

Aplicando o logaritmo decimal dos dois lados da igualdade, temos:

$$\log 2^{-4t} = \log \frac{16}{30}$$
$$-4t \cdot \log 2 = \log 2^4 - \log 3 - \log 10$$
$$-4t \log 2 = 4 \cdot \log 2 - \log 3 - \log 10$$
$$-4 \cdot 0{,}3 \cdot t = 4 \cdot 0{,}3 - 0{,}48 - 1$$
$$-1{,}2t = 1{,}2 - 0{,}4 - 1$$
$$-1{,}2t = -0{,}28$$
$$t = \frac{28}{120}$$
$$t = \frac{7}{30} \text{ do mês, portanto, 7 dias.}$$

10. E

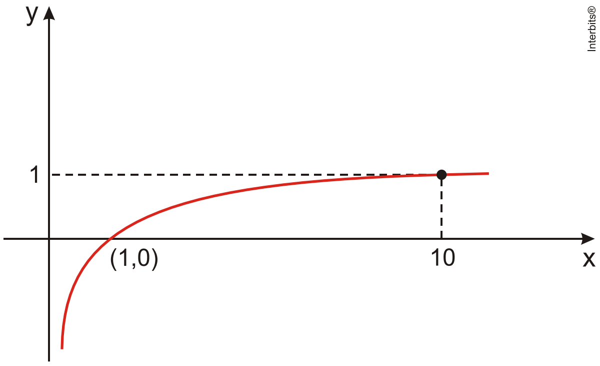
O número de classificações possíveis corresponde a $P_{16} = 16!$. Portanto, sendo $x = 16!$, temos

$$\log x = \log 16! \Leftrightarrow \log x = \log 16 \cdot 15!$$
$$\Leftrightarrow \log x = \log 2^4 + \log 15!$$
$$\Leftrightarrow \log x = 4 \cdot \log 2 + \log 15!$$
$$\Rightarrow \log x \cong 4 \cdot 0{,}3 + 12$$
$$\Rightarrow x \cong 10^{13{,}2}.$$

Em consequência, como x está mais próximo de 10^{12} do que de 10^{15}, segue-se que a ordem de grandeza pedida é de trilhões.

AULA 19

01. A



O gráfico da função y = log(x) é o que mais se aproxima da curva considerada.

02. C

$$t = 0 \Rightarrow Q(t) = 100\% \Rightarrow Q(0) = 30 \cdot 2^{1-\frac{0}{10}} = 30 \cdot 2^1 = 60$$
$$40\% \cdot 60 = 0{,}4 \cdot 60 = 24$$
$$24 = 30 \cdot 2^{1-\frac{t}{10}} \Rightarrow \frac{24}{30} = 2^{1-\frac{t}{10}} \Rightarrow 0{,}8 = 2^{1-\frac{t}{10}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_2 0{,}8 = \log_2 2^{1-\frac{t}{10}} \to \log_2 0{,}8 = 1 - \frac{t}{10}$$

Mas,

$$\log_2 0{,}8 = \frac{\log_{10} 0{,}8}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 8/10}{\log_{10} 2} =$$

$$= \frac{\log_{10} 8 - \log_{10} 10}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 2^3 - \log_{10} 10}{\log_{10} 2} =$$

$$= \frac{3 \cdot \log_{10} 2 - 1}{\log_{10} 2} = \frac{3 \cdot 0{,}3 - 1}{0{,}3} = \frac{-0{,}1}{0{,}3} = -\frac{1}{3}$$

Assim,

$$-\frac{1}{3} = 1 - \frac{t}{10} \Rightarrow -10 = 30 - 3t \Rightarrow 3t = 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{40}{3}\text{horas} = 800\,\text{min} = 13\text{h}20\,\text{min}.$$

03. A

Lembrando que $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$, com $1 \neq a > 0$ e $b > 0$, temos

$$Q = 15 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{2t} \Leftrightarrow 10^{-2t} = \frac{Q}{15}$$

$$\Leftrightarrow \log 10^{-2t} = \log \frac{Q}{15}$$

$$\Leftrightarrow -2t = \log \frac{Q}{15}$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \cdot \log \frac{Q}{15}$$

$$\Leftrightarrow t = \log \sqrt{\frac{15}{Q}}.$$

04. E

Seja a função $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dada por $p(t) = p_0 \cdot (1{,}02)^t$, com $p(t)$ sendo a população do país após t anos. Logo, como queremos calcular t para o qual se tem $p(t) = 2 \cdot p_0$, vem

$$2 \cdot p_0 = p_0 \cdot (1{,}02)^t \Leftrightarrow \log(1{,}02)^t = \log 2$$

$$\Leftrightarrow t \cdot \log(1{,}02) = \log 2$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}02}$$

$$\Rightarrow t \cong \frac{0{,}301}{0{,}0086}$$

$$\Leftrightarrow t = 35.$$

05. A

$f(c) = 1 \Rightarrow c = 10.$

$f(b) = 0 \Rightarrow b = 1.$

$f(a) = -1 \Rightarrow a = 0{,}1.$

Portanto,

$a + b + c = 11{,}1$

06. A

Calculando as áreas, temos:

$$S_{EAB} = \frac{1}{2} \cdot (3-2) \cdot (\log_b 3 - \log_b 2) = \frac{\log_b 3}{2} - \frac{\log_b 2}{2}$$

$$S_{BEDC} = \frac{1}{2} \cdot \left[(\log_b 4 - \log_b 2) + (\log_b 3 - \log_b 2)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{BEDC} = \frac{\log_b 2^2}{2} - \frac{\log_b 2}{2} + \frac{\log_b 3}{2} - \frac{\log_b 2}{2}$$

$$\Rightarrow S_{BEDC} = \frac{\log_b 3}{2}$$

$$S_{total} = \frac{\log_b 3}{2} - \frac{\log_b 2}{2} + \frac{\log_b 3}{2} = \log_b 3 - \frac{\log_b 2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{total} = \log_b 3 - \log_b 2^{1/2} = \log_b 3 - \log_b \sqrt{2} = \log_b \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$S_{total} = \log_b \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

07. C

Tem-se que

$$B(t) = 5000 \Leftrightarrow 800 \cdot 2^{\frac{t}{40}} = 5000$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{t}{40}} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \log 2^{\frac{t}{40}} = \log\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{40} \cdot \log 2 = 2 \cdot \log 10 - 4 \cdot \log 2$$

$$\Rightarrow \frac{t}{40} \cdot 0{,}3 = 2 - 4 \cdot 0{,}3$$

$$\Rightarrow t \cong 106{,}67\text{ h}.$$

08. D

Seja p o percentual do potencial eólico utilizado t anos após junho de 2016. Tem-se que

$$p = \frac{10}{500} \cdot 2^{\frac{t}{3}}, \text{ com } t \geq 0.$$

$$\frac{10}{500} \cdot 2^{\frac{t}{3}} = 1 \Leftrightarrow 2^{\frac{t}{3}} = 50$$

$$\Leftrightarrow \log 2^{\frac{t}{3}} = \log \frac{100}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{3} \cdot \log 2 = 2 \cdot \log 10 - \log 2$$

$$\Rightarrow \frac{t}{3} \cdot 0{,}3 \cong 2 - 0{,}3$$

$$\Rightarrow t \cong 17.$$

Portanto, segue que o Brasil atingirá 100% da utilização do seu potencial eólico em $2016 + 17 = 2033$.

09. B

Queremos calcular o valor de t para o qual se tem $D(t) = 2 \cdot D(0)$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} 2 \cdot D(0) = D(0) \cdot e^{0,006 \cdot t} &\Leftrightarrow \ell n\, 2 = \ell n\, e^{0,006 \cdot t} \\ &\Rightarrow 0,006t \cong 0,69 \\ &\Rightarrow t \cong 115. \end{aligned}$$

10. D

O saldo devedor após o pagamento de n parcelas é dado por $(0,8)^{n-1} \cdot D$. Assim, o saldo devedor será inferior a 25% de D para n tal que

$$\begin{aligned} (0,8)^{n-1} \cdot D < 0,25 \cdot D &\Leftrightarrow \left(\frac{2^3}{10}\right)^{n-1} < 2^{-2} \\ &\Leftrightarrow \log\left(\frac{2^3}{10}\right)^{n-1} < \log 2^{-2} \\ &\Leftrightarrow (n-1)(3 \cdot \log 2 - \log 10) < -2 \cdot \log 2 \\ &\Rightarrow n - 1 > \frac{0,602}{0,097} \\ &\Rightarrow n > 6,2 + 1 \\ &\Leftrightarrow n > 7,2. \end{aligned}$$

P

ortanto, Julia quitará sua dívida em 8 pagamentos.

AULA 20

01. B

Se o gráfico de f passa pelo ponto $(0, 23)$ e o ponto de mínimo é $(4, 7)$, então

$$23 = a \cdot (0 - 4)^2 + 7 \Leftrightarrow a = 1.$$

Portanto, segue que a resposta é dada por

$$(4, 7), f(1) = (1 - 4)^2 + 7 = 16.$$

02. C

Desde que $y = \frac{10 - 2x}{5}$, temos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + \left(\frac{10 - 2x}{5}\right)^2 \\ &= \frac{1}{25} \cdot (29x^2 - 40x + 100). \end{aligned}$$

Logo, sendo $-\frac{(-40)^2 - 4 \cdot 29 \cdot 100}{4 \cdot 29} = \frac{2500}{29}$ o valor mínimo de $29x^2 - 40x + 100$, podemos concluir que o resultado é $\frac{1}{25} \cdot \frac{2500}{29} = \frac{100}{29}$.

03. C

Seja ℓ a medida da largura, em centímetros. Tem-se que

$$\begin{aligned} &3200 \le \ell \cdot (\ell + 40) \le 6000 \\ &\Leftrightarrow 40 \cdot 80 \le \ell \cdot (\ell + 40) \le 60 \cdot 100 \\ &\Leftrightarrow 40 \cdot (40 + 40) \le \ell \cdot (\ell + 40) \le 60 \cdot (60 + 40) \\ &\Leftrightarrow 40 \le \ell \le 60. \end{aligned}$$

04. A

Queremos calcular t de modo que $f(t) = 0,8 \cdot A$.

Sabendo que $f(0) = 0,2 \cdot A$, temos

$$0,2 \cdot A = \frac{A}{1 + Be^{-Ak \cdot 0}} \Leftrightarrow 1 + B = 5 \Leftrightarrow B = 4.$$

Além disso, como $f(1) = 0,5 \cdot A$, vem

$$0,5 \cdot A = \frac{A}{1 + 4e^{-Ak \cdot 1}} \Leftrightarrow 1 + 4e^{-Ak} = 2 \Leftrightarrow e^{-Ak} = 4^{-1}.$$

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} f(t) = 0,8 \cdot A \Leftrightarrow \frac{4}{5} \cdot A &= \frac{A}{1 + 4 \cdot (e^{-Ak})^t} \\ &\Leftrightarrow 4 + 16 \cdot 4^{-t} = 5 \\ &\Leftrightarrow 4^{-t} = 4^{-2} \\ &\Leftrightarrow t = 2. \end{aligned}$$

05. C

Sendo V_0 o volume inicial da substância, o volume da susbtância no instante t em minutos é dado por $V(t) = V_0 \cdot 2^t$.

Como o recipiente estará cheio após 60 minutos então a capacidade C do recipiente é $C = V_0 \cdot 2^{60}$.

O tempo necessário para que o volume da substância seja $\frac{1}{4}$ da capacidade do recipiente é:

$$V_0 \cdot 2^t = \frac{V_0 . 2^{60}}{4} \Leftrightarrow 2^t = 2^{58} \Leftrightarrow t = 58 \text{ minutos}.$$

Isso ocorrerá às 9h58min.

06. C

Queremos calcular t, para o qual se tem $Q(t) = 0,9 \cdot Q_0$.

Lembrando que $\ell n\, a = \ell n\, b \Leftrightarrow a = b$ e $\ell n\, a^c = c \cdot \ell n\, a$, com a, b reais positivos e c real, vem:

$$0,9 \cdot Q_0 = Q_0(1 - e^{-\frac{t}{2}}) \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}} = 10^{-1} \Leftrightarrow \ell n\, e^{-\frac{t}{2}} = \ell n\, 10^{-1}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{t}{2} = -\ell n\, 10 \Leftrightarrow t = 2 \cdot \ell n\, 10 \Leftrightarrow t = 2 \cdot 2,3 \Leftrightarrow t = 4,6$$

07. C

Sendo $1+x^4+x^2>0$ e $1+2x^2>0$ para todo x real, vem

$$\log_2(1+x^4+x^2)+\log_2(1+2x^2)=0$$
$$\Leftrightarrow \log_2(1+x^4+x^2)(1+2x^2)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1+2x^2+x^4+2x^6+x^2+2x^4=2^0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2\left(x^4+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2(x-0)^2\left(\left(x^2+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\right)=0.$$

Portanto, como $\left(x^2+\frac{3}{4}\right)^2>0$ para todo x real, podemos concluir que a equação possui uma única raiz real de multiplicidade igual a 2, qual seja $x=0$.

08. B

Sendo x um número real maior do que 1, temos

$$\log_2 x+\log_x 2\geq k \Leftrightarrow \log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}\geq k$$
$$\Rightarrow \log_2^2 x-k\log_2 x+1\geq 0.$$

Logo, segue que o discriminante do trinômio $\log_2^2 x-k\log_2 x+1$ deve ser menor do que ou igual a zero. Daí, vem $(-k)^2-4\cdot 1\cdot 1\leq 0$, implicando em $-2\leq k\leq 2$. Portanto, o maior valor de k é 2.

09. A

Queremos calcular o menor valor de t para o qual se tem $f(t)\geq 64000$. Assim, vem que

$$1000\cdot 2^{\frac{2t}{3}}\geq 64000 \Leftrightarrow 2^{\frac{2t}{3}}\geq 2^6 \Leftrightarrow t\geq 9.$$

10. B

$$81=100.(0,9)^t \Rightarrow (0,9)^t=0,81\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (0,9)^t=(0,9)^2 \Rightarrow t=2.$$